MODUL 1

Prinsip Dasar Matematika

Prof. Gatot Muhsetyo, M.Sc.

PENDAHULUAN

Prinsip dasar matematika diskrit merupakan konsep-konsep utama matematika yang dapat digunakan sebagai model pemikiran dalam menjawab atau menyelesaikan masalah yang serupa, yaitu untuk mencari jawaban dari permasalahan yang terkait dengan menghitung banyak. Permasalahan tentang banyak dapat berupa banyaknya susunan, banyaknya cara, banyaknya pilihan, atau banyaknya selesaian.

Prinsip dasar matematika didefinisikan sebagai: strategi sistematis dan mendasar yang digunakan untuk keperluan tertentu dalam menjawab permasalahan matematika. Jika permasalahan matematika dikaitkan dengan penalaran dalam pembuktian, maka prinsip dasar membuktikan ini disebut prinsip dasar induksi matematika. Jika permasalahan matematika dikaitkan dengan membilang (counting, enumerating), atau mencari banyak cara (kasus, kejadian) dari suatu peristiwa, maka prinsip dasar mencari ini disebut prinsip dasar membilang. Wujud nyata dari prinsip dasar matematika adalah penemuan pola (pattern), yaitu sifat atau atribut persekutuan dari beberapa kasus.

Pola banyak dipelajari dan diperlukan untuk berbagai kepentingan dalam kehidupan sehari-hari. Pola tingkah laku dipelajari oleh ahli psikologi. Pola cuaca dipelajari oleh ahli cuaca, antara lain berupa ramalan cuaca dan peristiwa alam (hujan, angin, gelombang, kelembaban, gempa bumi, tsunami, badai). Pola gerakan planet, dikaji oleh ahli astronomi. Mencari pola adalah suatu strategi pemecahan masalah yang berguna dalam matematika, dan banyak orang menyebutnya sebagai **the art of mathematics (Bennet, 2004).** Kegiatan dalam mencari pola matematis adalah mengkonstruksi bukti, yaitu mengembangkan aturan atau hubungan melalui pemeriksaan dari tebakan dari fakta yang tersedia.

Materi dalam modul ini meliputi konsep dan penerapan dari prinsip induksi matematika, prinsip penjumlahan, prinsip inklusi-eksklusi, prinsip perkalian, dan prinsip kandang merpati.

KOMPETENSI UMUM

Kompetensi Umum dalam mempelajari modul ini adalah mahasiswa mampu memahami konsep dan penerapan dari prinsip induksi matematika serta prinsip dasar membilang.

KOMPETENSI KHUSUS

Kompetensi Khusus dalam mempelajari modul ini adalah mahasiswa mampu menjelaskan dan menerapkan prinsip induksi matematika, prinsip penjumlahan, prinsip inklusi – eksklusi, prinsip perkalian, dan prinsip kandang merpati, untuk keperluan kehidupan sehari-hari dan untuk keperluan bagian matematika yang lain.

SUSUNAN KEGIATAN BELAJAR

Modul ini terdiri dari dua kegiatan belajar. Kegiatan belajar pertama adalah Prinsip Induksi Matematika. Kegiatan belajar kedua adalah Prinsip Dasar Membilang.

Petunjuk Belajar

1. Bacalah uraian dan contoh dengan cermat berulang-ulang sehingga Anda benar-benar memahami dan menguasai materi paparan.
2. Kerjakan latihan yang tersedia secara mandiri. Jika dalam kasus tertentu Anda mengalami kesulitan menjawab, maka lihatlah rambu-rambu jawaban latihan. Jika langkah tersebut belum berhasil menjawab atau memahami soal latihan beserta rambu-rambu jawaban latihan, maka mintalah bantuan tutor Anda, atau orang lain yang lebih tahu.
3. Kerjakan tes formatif secara mandiri, dan periksalah tingkat kemampuan Anda dengan jalan mencocokkan jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif. Ulangilah pengerjaan tes formatif ini sampai Anda benar-benar merasa mampu mengerjakan semua soal dengan benar.

KEGIATAN BELAJAR 1

Prinsip Induksi Matematika

Prinsip induksi matematika merupakan suatu alat bernalar untuk membuktikan hasil-hasil, terutama yang terkait dengan bilangan bulat, atau hubungan tertentu yang dapat diperluas berlaku untuk semua bilangan asli. Sasaran yang terkait terutama tentang penjumlahan, dan hubungan tertentu antara lain dapat berupa ketidaksamaan, keterbagian, atau diferensial.

Dalam kaitannya dengan hasil penjumlahan, prinsip induksi matematika melibatkan notasi jumlah (*summation*) dan notasi kali (*products*). Kedua notasi ini sangat bermanfaat untuk menyederhanakan tulisan sehingga menjadi lebih singkat dan lebih mudah dipahami.

A. NOTASI JUMLAH DAN NOTASI KALI

Notasi jumlah adalah notasi yang dilambangkan dengan $\sum$, dan notasi kali adalah notasi yang dilambangkan dengan $\prod$, dan didefinisikan sebagai:

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = x_1 + x_2 + \dots x_r$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i = x_1 \,.\, x_2 \dots x_r$$

Huruf i dari indeks jumlah notasi jumlah atau notasi kali disebut variabel dummy, yaitu sebarang huruf yang digunakan dalam memberi nilai batas bawah dan batas atas notasi sigma.

$$\sum_{i=1}^{r} x_i = \sum_{j=1}^{r} x_j = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

$$\prod_{i=1}^{r} x_i = \prod_{j=1}^{r} x_j = \sum_{k=1}^{r} x_k$$

$i = 1$ disebut batas bawah (*lower limit*) dan $i = r$ disebut batas atas (*upper limit*).

Contoh 1.1

a. $\sum_{i=1}^{4} i = 1+2+3+4 = 10$

b. $\prod_{f=1}^{4} i = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 = 24$

c. $\sum_{k=1}^{5} 3 = 3+3+3+3+3 = 15$

d. $\prod_{k=1}^{5} 3 = 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 \,.\, 3 = 243$

e. $\sum_{t=1}^{3} t^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14$

f. $\prod_{t=1}^{3} t^2 = 1^2 .\ 2^2 .\ 3^2 = 36$

Selanjutnya, indeks batas bawah tidak harus dimulai dari 1, artinya dapat dimulai dari bilangan bulat selain 1 asalkan batas bawah tidak melebihi batas atas.

Contoh 1.2

a. $\sum_{i=3}^{5} i = 3+4+5 = 12$

b. $\sum_{t=4}^{6} (2t-1) = (2.4-1)+(2.5-1)+(2.6-1) = 27$

c. $\prod_{k=2}^{4} 2^k = 2^2 .\ 2^3 .\ 2^4 = 4 \,.\, 8 \,.\, 16 = 572$

d. $\prod_{t=2}^{4} (t-1) = (2-1)(3-1)(4-1) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$

Indeks batas bawah dan indeks batas atas yang digunakan dapat juga menggunakan bilangan negatif. Modifikasi dapat dilakukan dengan menggunakan dummy variabel lain. Perubahan variabel dummy ini perlu hati-hati karena berakibat pada perubahan bentuk aljabar yang sedang dioperasikan.

Contoh 1.3

a. Mengubah $\sum_{t=4}^{6}(2t-1)$ menjadi $\sum_{k=2}^{4}(2k+3)$

Misalkan $k=t-2$, maka $t=k+2,$ sehingga $(2t-1)=\{2(k+2)-1\}=(2k+3),$ dan untuk $t=4,$ $k=t-2=4-2=2,$ serta untuk $t=6,$ $k=t-2=4$

Dengan demikian dapat diperoleh bahwa:

$$\sum_{t=4}^{6}(2t-1)=\sum_{k=2}^{4}(2k+3)$$

$$\sum_{t=4}^{6}(2t-1)=27$$

$$\sum_{k=2}^{4}(2k+3)=(2.2+3)+(2.3+3)+(2.4+3)=7+9+11=27$$

b. Mengubah $\sum_{k=-2}^{3}(2k+3)$ menjadi $\sum_{m=1}^{\dots}(\dots)$

Jika $k=-2,$ maka $m=1,$ berarti $m=k+3$ sebab $k+3=1$
Karena $m=k+3,$ maka untuk $k=3,$ $m=k+3=3+3=6$
$m=k+3,$ berarti $k=m-3,$ sehingga $2k+3=2(m-3)+3,$
yaitu $2k+3=2m-3$

Jadi: $\sum_{k=-2}^{3}(2k+3)=\sum_{m=1}^{6}(2m-3)$

Pemeriksaan (pengecekan)

$$\sum_{k=-2}^{3}(2k+3)=(-4+3)+(-2+3)+(0+3)+(2+3)+(4+3)+(6+3)$$
$$=-1+1+3+5+7+9=24$$

$$\sum_{m=1}^{6}(2m-3)=(2-3)+(4-3)+(6-3)+(8-3)+(10-3)+(12-3)$$
$$=-1+1+3+5+7+9=24$$

Tentu saja perubahan bentuk aljabar, batas bawah, dan batas atas, berlaku juga untuk penggunaan operator perkalian.

Contoh 1.4

Beberapa sifat yang terkait dengan notasi jumlah adalah:

1) $$\sum_{i=r}^{s} tx_i = tx_r + tx_{r+1} + \ldots + tx_s$$
$$= t\left(x_r + x_{r+1} + \ldots + x_s\right)$$
$$= t\sum_{i=r}^{s} x_i$$

2) $$\sum_{i=r}^{s}\left(x_i + y_i\right) = \left(x_r + y_r\right) + \left(x_{r+1} + y_{r+1}\right) + \ldots + \left(x_s + y_s\right)$$
$$= \left(x_r + x_{r+1} + \ldots + x_s\right) + \left(y_r + y_{r+1} + \ldots + y_s\right)$$
$$= \sum_{i=r}^{s} x_i + \sum_{i=r}^{s} y_i$$

3) $$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_i y_j = \sum_{i=a}^{b}\left(x_i \sum_{j=c}^{d} y_j\right)$$
$$= \sum_{i=a}^{b} x_i\left(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d\right)$$
$$= x_a\left(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d\right) + x_{a+1}\left(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d\right) + \ldots + x_b\left(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d\right)$$
$$= \left(x_a + x_{a+1} + \ldots + x_b\right)\left(y_c + y_{c+1} + \ldots + y_d\right)$$
$$= \left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right)$$

4) $$\sum_{i=a}^{b}\sum_{j=c}^{d} x_i y_j = \left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)\left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right)$$
$$= \left(\sum_{j=c}^{d} y_j\right)\left(\sum_{i=a}^{b} x_i\right)$$
$$= \sum_{j=c}^{d}\sum_{i=a}^{b} y_j x_i$$
$$= \sum_{j=c}^{d}\sum_{i=a}^{b} x_i y_j$$

Contoh 1.5

a) $\sum_{i=3}^{5} 2x_i = 2x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 2(x_3 + x_4 + x_5) = 2\sum_{i=3}^{5} x_i$

b) $\sum_{i=2}^{4} (2a_i + 3b_i) = (2a_2 + 3b_2) + (2a_3 + 3b_3) + (2a_4 + 3b_4)$

$$= (2a_2 + 2a_3 + 2a_4) + (3b_2 + 3b_3 + 3b_4)$$
$$= 2(a_2 + a_3 + a_4) + 3(b_2 + b_3 + b_4)$$
$$= 2\sum_{i=2}^{4} a_i + 3\sum_{i=2}^{4} b_i$$

c) $\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{2} ij^2 = \sum_{i=1}^{3} (i \,.\, 1^2 + i \,.\, 2^2)$

$$= \sum_{i=1}^{3} 5i = 5 \,.\, 1 + 5 \,.\, 2 + 5 \,.\, 3 = 30$$

d) $\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{3} ij^2 = \sum_{j=1}^{2} (i \,.\, j^2 + 2 \,.\, j^2 + 3 \,.\, j^2)$

$$= \sum_{j=1}^{2} 6j^2 = 6 \,.\, 1^2 + 6 \,.\, 2^2 = 6 \,.\, 1 + 6 \,.\, 4 = 30$$

B. PRINSIP INDUKSI MATEMATIKA (PRINCIPLE OF MATHEMATICAL INDUCTION)

S adalah suatu himpunan bagian dari himpunan bilangan asli N yang unsur-unsurnya memenuhi hubungan S(k).

Jika: (a) $1 \in S$

(b) $k \in S$ berakibat $(k+1) \in S$

maka: S memuat semua bilangan asli, yaitu $S = N$

Bukti:

Misalkan $S \subset N$ dan unsur-unsur S ditentukan memenuhi suatu hubungan, serta (a) dan (b) dipenuhi oleh S. Harus dibuktikan bahwa $S = N$. Untuk membuktikan $S = N$ digunakan bukti tidak langsung.

Anggaplah $S \neq N$, maka tentu ada himpunan $F \subset N$ dan $F \neq \varnothing$ yang mana $F = \{t \in N \mid t \notin S\}$.

Karena $F \neq \varnothing$ dan $F \subset N$, maka menurut prinsip urutan rapi (Well Ordering Principle), F mempunyai unsur terkecil k, yaitu $k \in F$ tetapi $k \notin S$.
$k \neq 1$ sebab $1 \in S$, berarti $k > 1$, dan akibatnya $k - 1 \in N$.
k adalah unsur terkecil F, maka $k - 1 \notin$ F sebab $k - 1 < k$, berarti $k - 1 \in S$.
$k - 1 \in S$ dan S memenuhi (b), maka
$(k - 1) + 1 \in S$, atau $k - 1 + 1 \in S$, yaitu $k \in S$.
Terjadi kontradiksi karena $k \notin S$ dan $k \in S$, jadi $S = N$

Dalam pernyataan lain, prinsip induksi matematika dapat ditulis dengan $S(n)$ adalah suatu pernyataan yang memenuhi hubungan untuk satu atau lebih $n \in N$.
Jika: (a) $S(1)$ benar
(b) $S(k)$ benar berakibat $S(k+1)$ benar
maka $S(k)$ benar untuk semua $n \in N$.

Contoh 1.6

Buktikan untuk sebarang $n \in N$, $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$

Bukti: $S(n)$: $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1)$

$S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$:

ruas kiri: $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{1} i = 1$ dan

ruas kanan: $\frac{1}{2} n(n+1) = \frac{1}{2} \cdot 1(1+1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k$:

ruas kiri: $\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \ldots + k$ dan

ruas kanan: $\frac{1}{2} k(k+1)$, sedemikian hingga ruas kiri = ruas kanan,

yaitu: $\sum_{i=1}^{k} i = 1 + 2 + \ldots + k = \frac{1}{2} k(k+1)$

Harus dibuktikan $S(k+1)$ benar, yaitu:

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1+2+1\ldots+k+k+1 = \frac{1}{2}(k+1)(k+1+1) = \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

(ruas kiri) = (ruas kanan)

$$\text{ruas kiri} = \sum_{i=1}^{k+1} i = \underbrace{1+2+\ldots+k}_{\frac{1}{2}k(k+1)+k+1} + k+1 = \frac{1}{2}k(k+1)+k+1$$

$$= (k+1)\left(\frac{1}{2}k+1\right)$$

$$= (k+1)\ \frac{1}{2}(k+2)$$

$$= \frac{1}{2}(k+1)(k+2)$$

= ruas kanan

Jadi: $S(n)$ benar untuk sebarang $n \in N$ yaitu $S = N$

Contoh 1.7

Buktikan untuk sebarang $n \in N,\ \sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

Bukti: $S(n) = \sum_{i=1}^{n} i^2 = n(n+1)(2n+1)/6$

$S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 \text{ dan } \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{6}\ .\ 1\ .\ 2\ .\ 3 = 1$$

Misalkan $S(k)$ benar, yaitu untuk $n = k$:

$$\sum_{i=1}^{k} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$$

Harus dibuktikan S(k + 1) benar, yaitu

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^2 = \underbrace{1^2 + 2^2 + \ldots + k^2}_{\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)} + (k+1)^2 = \frac{1}{6}k(k+1)(2k+1) + (k+1)^2$$

$$= (k+1)(k+1)\left\{\frac{1}{6}k(2k+1)+(k+1)\right\}$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}$$

$$= \frac{1}{6}k(k+1)+(2k^2+k+6k+6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(2k^2+7k+6)$$

$$= \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

Contoh 1.8

Buktikan: untuk semua $n \in N$, dan $n \geq 6$, $4n < n^2 - 7$

Bukti: $S(n): 4n < n^2 - 7,\ n \geq 6$

$S(6)$ benar sebab untuk $n = 6$

$4n = 4\ .\ 6 = 24,\ n^2 - 7 = 6^2 - 7 = 36 - 7 = 31,$ dan $24 < 31$

Misalkan S(k) benar, yaitu untuk $n = k$:

$$4k < k^2 - 7$$

Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu untuk $n = k+1,$

$$4(k+1) < (k+1)^2 - 7$$

$$4(k+1) = 4k+4 < (k^2-7)+4$$

$$4k+4 < (k^2-7)+13, \text{ sebab } 4 < 13$$

$$4k+4 < (k^2-7)+(2k+1), \text{ sebab } 2k+1 \geq 13 \text{ untuk } n \geq 6$$

$$4k+4 < (k^2+2k+1)-7$$

$$4k+4 < (k+1)^2 - 7$$

Jadi: $4n < n^2 - 7$ untuk semua bilangan bulat $n \geq 6$

Contoh 1.9

Buktikan : $6^{n+2} + 7^{2n+1}$ habis dibagi oleh 43 untuk semua $n \in Z^{+}$

Bukti : $S(n): 6^{n+2} + 7^{2n+1}$ habis dibagi oleh 43

S(1) benar sebab untuk $n = 1$:

$6^{n+2} + 7^{2n+1} = 6^3 + 7^5 = 559 = 43(13)$

559 habis dibagi oleh 43

Misalkan S(k) benar, yaitu untuk $n = k$:

$6^{k+2} + 7^{2k+1}$ habis dibagi oleh 43

Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu untuk

$n = k+1, 6^{k+3} + 7^{2k+3}$ habis dibagi oleh 43

$$\left(6^{k+3} + 7^{2k+3}\right) - \left(6^{k+2} + 7^{2k+1}\right)$$
$$= \left(6^{k+3} - 6^{k+2}\right) + \left(7^{2k+3} - 7^{2k+1}\right)$$
$$= 6^{k+2}(6-1) + 7^{2k+1}\left(7^2 - 1\right)$$
$$= 5 \,.\, 6^{k+2} + 48 \,.\, 7^{2k+1}$$
$$= 5 \,.6^{k+2} + (5+43) \,.\, 7^{2k+1}$$
$$= 5\left(6^{k+2} + 7^{2k+1}\right) + 43 \,.\, 7^{2k+1}$$
$$= 5 \,.\, 43x + 43 \,.\, 7^{2k+1}$$
$$6^{k+3} + 7^{2k+3} - 43x = 5 \,.\, 43x + 43.7^{2k+1}$$
$$6^{k+3} + 7^{2k+3} = 6(43x) + 43.7^{2k+1}$$
$$= 43\left(6x + 7^{2k+1}\right)$$

$6^{k+3} + 7^{2k+3}$ habis dibagi oleh 43 sebab mempunyai faktor 43

Jadi: $6^{n+3} + 7^{2n+3}$ habis dibagi oleh 43 untuk semua $n \in Z^{+}$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

Buktikan dengan induksi matematika

1) $n < 2^n$ untuk semua $n \in N$.
2) $n^3 - n$ habis dibagi 3 untuk semua $n \in N$.

3) $2^n < n!$ untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$

4) Di dalam barisan harmonis:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots$$

berlaku

$H_{2^n} \geq 1+\frac{n}{2}$, untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$

5) $\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$

6) $$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

7) $$\sum_{t=1}^{r} t^2 = 1^2+2^2+3^2+\ldots+r^2 = \frac{1}{6}r\left(r+1\right)\left(2r+1\right)$$ untuk setiap $n \in N$

8) $$\sum_{r=2}^{s}\frac{1}{r^2-1}\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\ldots+\frac{1}{s^2-1} = \frac{3}{4}-\frac{2s+1}{2s(s+1)}$$

dengan hubungan menggunakan hubungan:

$$\frac{1}{s^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}\right)$$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $S\left(n\right): n < 2^n$

$S\left(1\right)$: benar sebab untuk $n = 1$:

$n = 1,\ 2^n = 2^1 = 2,\ \text{dan}\ 1 < 2$

Misalkan $S\left(k\right)$ benar, yaitu $k < 2^k$

Harus dibuktikan bahwa $S\left(k+1\right)$ benar, yaitu $\left(k+1\right) < 2^{k+1}$

$k < 2^k$, maka $k + 1 < 2^k + 1$, sehingga

$k + 1 < 2^k + 2^k$ (sebab $2^k \geq 1$ untuk sebarang $k \geq 1$), atau

$k + 1 < 2.2^k$, berarti

$k + 1 < 2^{k+1}$

Jadi: $n < 2^n$ untuk setiap $n \in Z^+$

2) $S\left(n\right)$: $n^3 - n$ habis dibagi oleh 3

$S(1)$ benar sebab untuk $n = 1$:
$n^3 - n = 1^3 - 1 = 1 - 1 = 0$ dan 0 habis dibagi oleh 3.
Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $k^3 - k$ habis dibagi oleh 3
Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar, yaitu
$(k+1)^3 - (k+1)$ habis dibagi oleh 3

$$\begin{aligned}(k+1)^3 - (k+1) &= \left(k^3 + 3k^2 + 3k + 1\right) - (k+1)\\ &= \left(k^3 - k\right) + 3\left(k^2 + k\right)\\ &= 3t + 3\left(k^2 + k\right)\\ &= 3\left(t + k^2 + k\right)\end{aligned}$$

$(k+1)^3 - (k+1)$ habis dibagi 3 sebab mempunyai faktor 3
Jadi: $n^2 - n$ habis dibagi 3 untuk setiap $n \in Z^+$

3) $S(n): 2^n < n!$ untuk setiap bilangan bulat positif $n \geq 4$
$S(4)$ benar sebab untuk $n = 4$
$2^n = 2^4 = 16,\ n! = 4! = 24,\ \text{dan}\ 16 < 24$
Misalkan $S(k)$ benar, yaitu $2^k < k!$
Harus dibuktikan bahwa $S(k+1)$ benar yaitu:
$2^{k+1} < (k+1)!$
$2^{k+1} = 2^k .\ 2 < 2\ .\ k\ !$
$2^{k+1} < (k+1)\ .\ k!$ sebab $k+1 \geq 2$ untuk sebarang $k \in Z^+$
$2^{k+1} < (k+1)!$
Jadi: $2^{k+1} < (k+1)!$ untuk setiap bilangan asli n.

4) $S(n): H_{2^n} \geq 1 + \dfrac{n}{2}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$

$$H_t = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{t}$$

$$H_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}$$

$S(0)$ benar sebab untuk $n = 0$:

$H_{2^0} = H_1 = 1, 1 + \frac{n}{2} = 1 + 0, \text{ dan } 1 \geq 0$

Misalkan H_{2^k} benar, yaitu untuk $n = k$:

$H_{2^k} \geq 1 + \frac{k}{2}$

Harus dibuktikan $H_{2^{k+1}}$ benar, yaitu untuk $n = k + 1$:

$H_{2^{k+1}} \geq 1 + (k+1)/2$

$$H_{2^{k+1}} = \underbrace{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2^k}}_{} + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$= \quad H_{2^k} \quad + \frac{1}{2^{k+1}} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2^k + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{k+1}}$$

$$\geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + 2^k . \frac{1}{2^{k+1}} + \ \ldots \ + \frac{1}{2^{k+1}}$$

sebab terdapat 2^n suku masing-masing tidak kurang dari $\frac{1}{2^{k+1}} \geq \left(1 + \frac{k}{2}\right) + \frac{1}{2}$

$H_{2^{k+1}} \geq 1 + \frac{1}{2}(k+1)$

Jadi $H_{2^{n+1}} \geq 1 + \frac{1}{2}(n+1)$ untuk sebarang bilangan bulat $n \geq 0$

5) $S(n) : \frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}$ untuk setiap bilangan bulat $n \geq 0$

$S(0)$ benar sebab $\frac{dx^n}{dx} = \frac{dx^0}{dx} = \frac{dx^1}{dx} = 0, \ nx^{n-1} = 0 \cdot x^{-1} = 0$

Misalkan S(k) benar, yaitu $\frac{dx^k}{dx} = kx^{k-1}$

Harus dibuktikan $S(k+1)$ benar, yaitu $\frac{dx^{k+1}}{dx} = (k+1)x^k$

$$\frac{dx^k}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} \text{, maka}$$

$$\frac{dx^{k+1}}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^{k+1} - x^{k+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k . (x+\Delta x) - x^{k+1}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^k x + (x+\Delta x)^k . \Delta x - x^k . x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left\{ x \frac{(x+\Delta x)^k - x^k}{\Delta x} + \frac{(x+\Delta x)^k . \Delta x}{\Delta x} \right\}$$

$$= xk\, x^{k-1} + x^k$$

$$= kx^k + x^k$$

$$= (k+1) x^k$$

6) Cara 1: Gunakan hubungan:

$\frac{1}{t(t+1)} = \frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}$ = untuk mengganti setiap suku deret

Cara ini disebut cara teleskopis

Cara 2: Gunakan induksi matematika, tunjukkan:

$$\frac{1}{k+1} + \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{k+1}{k+2}$$

7) Tunjukkan bahwa

$$\frac{1}{6}(k+1)(2k+1) + (k+1)^2 = \frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$$

8) $$\sum_{r=2}^{s} \frac{1}{r^2-1} = \sum_{r=2}^{s} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r+1}\right) = \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r} + \frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left\{\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r-1} - \frac{1}{r}\right) + \frac{1}{2}\sum_{r=2}^{s}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r+1}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{s}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{s+1}\right)$$
$$= \frac{3}{4}-\frac{2s+1}{2s(s+1)}$$

RANGKUMAN

Dalam Kegiatan Belajar 1 ini telah Anda pelajari pokok-pokok materi perkuliahan, yaitu:

1. Penggunaan notasi jumlah dan notasi kali.
2. Penggunaan variabel dummy.
3. Sifat-sifat notasi jumlah.
4. Prinsip induksi matematika.
5. Pembuktian hubungan jumlah deret dengan induksi matematika.
6. Pembuktian hubungan pertidaksamaan dengan induksi matematika.
7. Pembuktian hubungan keterbagian dengan induksi matematika.
8. Pembuktian hubungan diferensial dengan induksi matematika.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $\sum_{t=2}^{5} 3 = ...$

A. 12
B. 15
C. 10
D. 6

2) $\prod_{k=3}^{6} 2 = ...$

A. 12
B. 14
C. 16
D. 18

3) $\sum_{r=1}^{5}\sum_{s=1}^{6} rs = ...$

A. 513
B. 531
C. 351
D. 315

4) $\sum_{s=1}^{3}\prod_{t=1}^{4} st = ...$

A. 5232
B. 3522
C. 2532
D. 2352

5) Berdasarkan identitas $\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$, maka dapat ditentukan bahwa

$\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{s(s+1)} = ...$

A. $\frac{t+1}{t}$
B. $\frac{t-1}{t}$
C. $\frac{t}{t+1}$
D. $\frac{t}{t-1}$

6) $\sum_{k=1}^{50} k^2 = ...$

A. 452452
B. 452425
C. 425452
D. 425425

7) $\sum_{m=1}^{n} m(m+1) = ...$

A. $\frac{1}{3}(n+1)(n+2)$

B. $\frac{1}{3}(n-1)(n+2)$

C. $\frac{1}{3}(n+1)(n-2)$

D. $\frac{1}{3}(n-1)(n-2)$

8) $\sum_{r=0}^{10} (-2)^r = ...$

A. 863
B. 836
C. 683
D. 638

9) $\sum_{n=3}^{10} (2n+1) = ...$

A. 112
B. 121
C. 122
D. 211

10) 2 + 6 + 12 + … + 110 = ...

A. 220
B. 330
C. 440
D. 550

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Prinsip Dasar Membilang

Membilang (*enumerating, counting*) bukan sekedar aritmetika biasa karena sasaran yang dipelajari memasuki berbagai bagian matematika, antara lain probabilitas, statistika, analisis algoritma, dan aljabar. Kejadian dalam kasus-kasus tertentu dicacah (dihitung) berdasarkan cara-cara khusus untuk menyelesaikan masalah yang beragam.

Beberapa masalah yang terkait dalam enumerasi atau membilang antara lain adalah permutasi, kombinasi, binomial, multinomial, dan kandang merpati. Dalam banyak hal, masalah enumerasi memerlukan prinsip-prinsip khusus untuk membantu pengembangan teori-teorinya, antara lain adalah prinsip penjumlahan, prinsip perkalian, gabungan prinsip penjumlahan dan perkalian, dan prinsip kandang merpati (*pigeonhole principle*).

A. PRINSIP DASAR PENJUMLAHAN (*THE SUM RULE, THE RULE OF SUM*).

Jika suatu pekerjaan pertama dapat dilakukan dalam n_1 cara, suatu pekerjaan kedua dapat dilakukan dalam n_2 cara, dan kedua pekerjaan tidak dapat terjadi dalam waktu yang bersamaan, maka seluruh pekerjaan dapat dilakukan dalam $\left(n_1 + n_{2\text{-}}\right)$ cara.

Contoh 2.1

Suatu Jurusan Matematika harus mengirim seorang wakil untuk mengikuti suatu pertemuan ilmiah yang diambil dari kelompok dosen sebanyak 50 dosen, atau kelompok mahasiswa sebanyak 400 mahasiswa.

Dari keadaan ini dapat diketahui bahwa pekerjaan pertama adalah memilih 1 dosen dari 50 dosen, dan pekerjaan ini dapat dilakukan dalam 50 cara, serta pekerjaan kedua adalah memilih 1 mahasiswa dari 400 mahasiswa, dan pekerjaan ini dapat dilakukan dalam 400 cara.

Pekerjaan pertama dan pekerjaan kedua tidak dapat terjadi bersama-sama karena perwakilan yang dikirim hanya 1 orang.

Banyaknya cara memilih seorang wakil adalah 50 + 400 = 450 cara.

Contoh 2.2

Dalam suatu ujian, setiap mahasiswa diminta mengerjakan 1 nomor soal dari 10 nomor soal A atau 15 nomor soal B.

Dalam keadaan ini setiap mahasiswa dihadapkan pada dua tugas, tugas pertama memilih 1 nomor soal dari 10 nomor soal A, dan tugas kedua memilih 1 nomor soal dari 15 nomor soal B.

Karena banyaknya cara memilih 1 nomor soal dari 10 nomor soal A adalah 10, dan banyaknya cara memilih 1 nomor soal dari 15 nomor soal B adalah 15, serta masing-masing pilihan tidak boleh rangkap mengerjakan 1 nomor soal dari 10 nomor soal A dan 1 nomor soal dari 15 nomor soal B, maka banyaknya seluruh cara memilih 1 nomor soal adalah 10 + 15 = 25 cara.

Contoh 2.3

Seorang siswa diminta memilih 1 tugas untuk dikerjakan, dari dua daftar tugas yang masing-masing terdiri dari 15 soal dan 25 soal.

Banyaknya cara memilih tugas untuk dikerjakan adalah 15 + 25 = 40 cara.

Prinsip dasar penjumlahan dapat diperluas menjadi lebih dari dua pekerjaan. Dalam hal seperti ini, banyaknya cara untuk menyelesaikan pekerjaan sama dengan jumlah cara dari masing-masing bagian pekerjaan.

Contoh 2.4

Pada rak buku tersedia 5 buku geometri, 3 buku aljabar, dan 2 buku kalkulus.

Banyaknya cara seseorang mengambil satu buku dari rak buku adalah 5 + 3 + 2 = 10

Contoh 2.5

Nilai t dari bahasa semu (pemrograman):

$t := 0$

untuk $a_1 := 1$ ke n_1

$\quad t := t + 1$

untuk $a_2 := 1$ ke n_2

$\quad t := t + 1$

$\quad \vdots$

untuk $a_i := 1$ ke n_i

$\quad t := t + 1$

dapat dihitung sebagai berikut:
nilai awal t adalah 0 proses pertama memuat n_1, proses berulang, dan setiap proses berulang, t bertambah 1, dengan demikian pada akhir proses pertama nilai $t = n_1$ proses kedua memuat n_2 proses berulang, dan setiap proses berulang, t bertambah 1, dengan demikian pada akhir proses kedua nilai $t = n_1 + n_2$

Demikian seterusnya, sehingga pada akhir proses ke i, nilai $t = n_1 + n_2 + n_3 + \dots n_i$.

Dalam pemrograman BASIC, contoh nyata dari bahasa semu di atas adalah:

```
10  LET  T = 0
20  FOR  A = 1 TO 3
30         LET  T = T + 1
40  NEXT A
50  FOR  B = 1 TO 5
60         LET  T = T + 1
70  NEXT  B
80  FOR  C = 1 TO  7
90         LET  T =  T + 1
100 NEXT  C
110  PRINT  "T = ";T
120 END
```

Program di atas, jika dijalankan (dieksekusi), maka pada layar dihasilkan tulisan T = 15 (nilai 15 diperoleh dari 3 + 5 + 7)

Prinsip dasar penjumlahan dapat dinyatakan dalam bentuk himpunan:
Jika $A_1, A_2, \dots, A_n$ adalah himpunan-himpunan yang saling lepas (disjoint), maka banyaknya unsur gabungan $A_1, A_2, \dots, A_n$ sama dengan jumlah unsur dari $A_1, A_2, \dots, A_n$, yaitu:

$$\left|A_1, \cup A_2, \cup \dots \cup A_n\right| = \left|A_1\right| + \left|A_2\right| + \cdots + \left|A_n\right|$$

B PRINSIP DASAR PERKALIAN (THE PRODUCT RULE, THE RULE OF PRODUCT)

Jika suatu pekerjaan dapat dipisah menjadi dua pekerjaan, yaitu pekerjaan pertama yang dapat dilakukan dalam n_1 cara dan pekerjaan kedua yang dapat dikerjakan dalam n_2 cara setelah pekerjaan pertama dilakukan, maka seluruh pekerjaan dapat dilakukan dalam $(n_1 \times n_2)$ cara.

Contoh 2.6

Seorang pemuda mempunyai 4 baju dan 3 celana.

Banyaknya cara berpakaian pemuda itu dapat dipisah menjadi memakai baju (b), dilanjutkan dengan memakai celana (c) (atau sebaliknya).

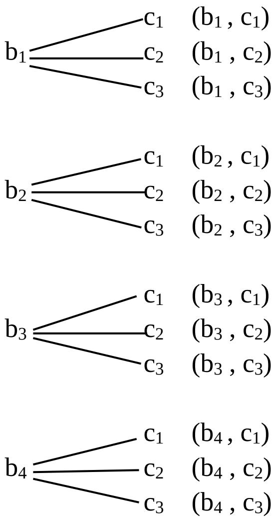
Jika baju pertama terpilih, maka ada 3 cara memilih celana pasangannya, berarti ada 3 cara berpakaian.

Jika baju kedua terpilih, maka ada 3 cara memilih celana pasangannya, berarti ada 3 cara berpakaian.

Demikian seterusnya, sehingga banyaknya cara berpakaian adalah

$$3 + 3 + 3 + 3 = 4 \times 3 = 12 \text{ cara.}$$

Jika $b_i\,(i = 1, 2, 3, 4)$ menyatakan baju ke i dan $c_j\,(j = 1, 2, 3, 4)$ menyatakan celana ke j, maka diagram pohon cara berpakaian dan tabel pasangan baju dan celana, adalah sebagai berikut:



	c_1	c_2	c_3
b_1	(b_1,c_1)	(b_1,c_2)	(b_1,c_3)
b_2	(b_2,c_1)	(b_2,c_2)	(b_2,c_3)
b_3	(b_3,c_1)	(b_3,c_2)	(b_3,c_3)
b_4	(b_4,c_1)	(b_4,c_2)	(b_4,c_3)

Contoh 2.7
Kursi-kursi suatu aula ditandai dengan suatu huruf dan suatu bilangan asli tidak lebih dari 50.
Banyaknya seluruh kursi yang dapat ditandai adalah:

$$26 \times 50 = 1300$$

Prinsip dasar perkalian dapat diperluas menjadi lebih dari dua pekerjaan. Dalam hal seperti ini, banyaknya cara untuk menyelesaikan seluruh pekerjaan sama dengan hasil kali dari banyaknya cara masing-masing pekerjaan.

Contoh 2.8
Nilai m dari bahasa semu:

$m := 0$

untuk $k_1 := 1$ ke t_1

untuk $k_2 := 1$ ke t_2

$\vdots$

untuk $k_1 := 1$ ke t_1

$m := m + 1$

dapat ditentukan yaitu $m = t_1 \times t_2 \times \ldots \times t_i$

Dalam pemrograman BASIC, contoh nyata dari bahasa semu di atas adalah:

```
10      LET  M = 0
20      FOR  X = 1 TO 3
30              FOR  Y = 1 TO 4
40                      FOR  Z = 1 TO 5
50                              LET   M = M + 1
60                      NEXT  Z
70              NEXT  Y
80      NEXT  X
90      PRINT  "M = "; M
100     END
```

Dari program di atas, jika dijalankan (dieksekusi), maka pada layar dihasilkan tulisan $M = 60$ (nilai 60 diperoleh dari $3 \times 4 \times 5$)

Contoh 2.9
Memori utama setiap komputer disimpan dalam sel memori yang disebut alamat (*address*).
Setiap alamat dinyatakan dalam daftar susunan lambang bilangan 0 dan 1, satu pasangan lambang 0 atau 1 disebut 1 bit. Jika setiap alamat mempunyai 8 lambang (atau 8 bit, atau 1 *byte*), maka banyaknya alamat yang tersedia adalah:

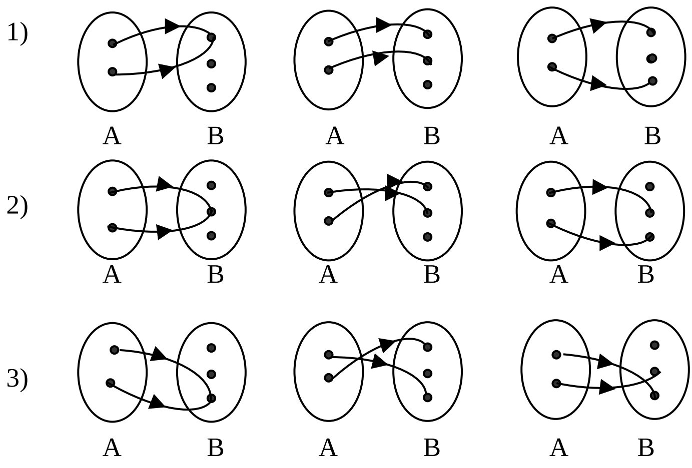
$$2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=256$$

Jika setiap alamat menggunakan dua byte atau 16 bit (atau 2 byte), maka banyaknya alamat yang dapat disediakan adalah:

$$256\times256=65536$$

Berapa banyaknya alamat yang bisa disediakan dengan kapasitas satu kilo byte (1000 byte)? Tentu Anda mengetahui jawabnya, yaitu 256000
Jika sekarang diperluas lagi dengan kapasitas 1 megabyte, atau kapasitas 1 gigabyte?

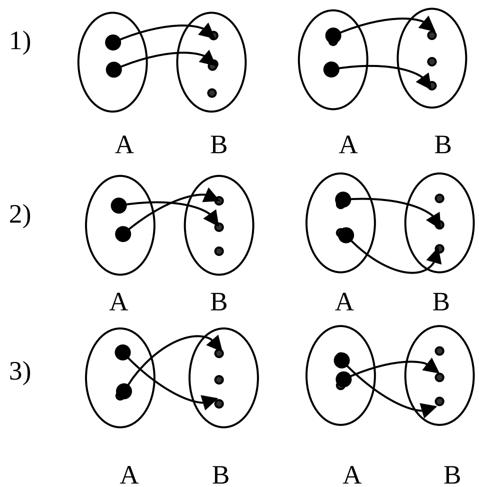
Contoh 2.10
Mencari banyaknya fungsi yang dapat dibuat dari A yang mempunyai 2 unsur, ke B yang mempunyai 3 unsur, dapat dilakukan dengan menggunakan diagram panah sebagai berikut.



Dari diagram panah di atas dapat diketahui berdasarkan 1), 2) dan 3) bahwa unsur pertama A mempunyai 3 pilihan (unsur pertama, unsur kedua,

dan unsur ketiga dari B), dan berdasarkan masing-masing 1), 2), dan 3) bahwa unsur kedua A juga mempunyai 3 pilihan (masing-masing dapat dipasangkan dengan unsur pertama, unsur kedua, dan unsur ketiga dari B).
Banyaknya fungsi yang dapat dibuat adalah $3 \times 3 = 3^2 = 9$
Jika A mempunyai 3 unsur, dan B mempunyai 3 unsur, maka berapa banyaknya fungsi dapat dibuat? Apakah $3 \times 3 \times 3 = 3^3 = 27$?
Unsur pertama *A* mempunyai 3 pilihan (unsur *B*), unsur kedua *A* mempunyai 3 pilihan (unsur *B*), dan unsur ke tiga A juga mempunyai 3 pilihan. Dengan demikian, berdasarkan prinsip perkalian, terdapat $3 \times 3 \times 3 = 3^3$ fungsi dari *A* ke *B*.
Secara umum dapat dikatakan bahwa: jika *A* mempunyai *r* unsur, dan *B* mempunyai *s* unsur, maka banyaknya fungsi dari *A* ke *B* yang dapat dibuat adalah $r.\,r.r.\,\ldots r = r^s$

Contoh 2.11
Mencari banyaknya fungsi $1-1$ (*one-to-one*, injektif) dari A yang mempunyai 2 unsur, ke B yang mempunyai 3 unsur, dapat dilakukan dengan menggunakan diagram panah sebagai berikut.



Dari diagram panah di atas dapat diketahui berdasarkan 1), 2), dan 3) bahwa unsur pertama *A* mempunyai 3 pilihan (unsur pertama, unsur kedua, dan unsur ketiga dari *B*), dan berdasarkan masing-masing 1), 2), dan 3) bahwa unsur

kedua *A* mempunyai 2 pilihan (unsur *B* yang bukan pasangan dari unsur pertama *A*).
Banyaknya fungsi yang dapat dibuat adalah 3 × 2 = 6
Secara umum dapat dikatakan bahwa: jika *A* mempunyai *r* unsur, dan *B* mempunyai *s* unsur, maka banyaknya fungsi 1 – 1 dari *A* ke *B* yang dapat dibuat adalah $r.(r-1).(r-2)\ldots(r+s=1)$

Contoh 2.12

Seseorang akan membuat susunan angka-angka menjadi bilangan bulat positif. Jika bilangan-bilangan itu terdiri dari satu angka, susunan dua angka, atau susunan tiga angka, dan untuk susunan dua atau tiga angka tidak ada angka yang berulang dan tidak ada susunan yang dimulai dengan nol, maka banyaknya seluruh susunan dapat dicari dengan menggunakan gabungan prinsip penjumlahan dan perkalian.

Prinsip perkalian digunakan untuk mencari banyaknya susunan dua angka dan susunan tiga angka.

Prinsip penjumlahan digunakan untuk mencari banyaknya seluruh susunan, dengan menjumlahkan banyaknya seluruh bilangan satu angka, banyaknya seluruh susunan dua angka, dan banyaknya seluruh susunan tiga angka.

1) Banyaknya seluruh bilangan satu angka adalah sembilan, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.
2) Banyaknya seluruh susunan dua angka adalah 81, yaitu 10, 12, 13, …, 19, 20, 21, 23, …, 29, 30, 31, 32, 34, …, …, 90, 91, 92, 93, 94, 95, 96, 97, 98.
   Angka pertama setiap susunan mempunyai 9 pilihan, yaitu 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, dan 9.
   Angka kedua setiap susunan mempunyai 9 pilihan (karena 0 dapat digunakan, tetapi tidak boleh ada angka yang berulang)
   Banyaknya seluruh susunan dua angka adalah 9 × 9 = 81.
3) Dengan jalan yang serupa pada butir 2), banyaknya seluruh susunan tiga angka adalah: 9 × 9 × 8 = 648
4) Banyaknya seluruh bilangan adalah 9 + 81 + 648 = 738

Contoh 2.13

Plat nomor kendaraan bermotor suatu negara dimulai dengan satu atau dua huruf, dan diikuti dengan tiga angka.

Banyaknya plat nomor yang tersedia dapat dicari dengan menggunakan prinsip penjumlahan dan perkalian.

Prinsip perkalian digunakan untuk mencari plat nomor satu huruf atau plat nomor dua huruf.

Prinsip penjumlahan digunakan untuk mencari keseluruhan plat nomor, yaitu plat nomor yang dimulai dengan satu huruf dan plat nomor yang dimulai dengan dua huruf.

1) Banyaknya plat nomor yang dimulai dengan satu huruf dan diikuti dengan tiga angka dicari sebagai berikut:
   Banyaknya pilihan huruf : 26
   Banyaknya pilihan angka pertama : 9
   Banyaknya pilihan angka kedua : 10
   Banyaknya pilihan angka ketiga : 10
   Banyaknya plat nomor satu huruf dan tiga angka adalah:
   $26 \times 9 \times 10 \times 10 = 23.400$
2) Banyaknya plat nomor yang dimulai dengan dua huruf dan diikuti dengan tiga angka dicari sebagai berikut:
   Banyaknya pilihan huruf pertama : 26
   Banyaknya pilihan huruf kedua : 26
   Banyaknya pilihan angka pertama : 9
   Banyaknya pilihan angka kedua : 10
   Banyaknya pilihan angka ketiga : 10
   Banyaknya plat nomor dua huruf dan tiga angka adalah:
   $26 \times 26 \times 9 \times 10 \times 10 = 608.400$
3) Banyaknya seluruh plat nomor yang dapat disediakan adalah:
   $23.400 + 608.400 = 631.800$

C. PRINSIP INKLUSI - EKSKLUSI

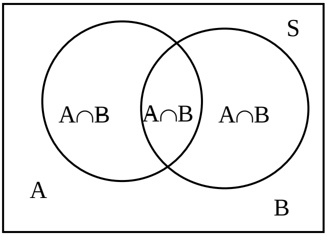
Prinsip penjumlahan digunakan untuk mencari banyaknya unsur-unsur dari himpunan yang lepas. Untuk mencari banyaknya unsur-unsur dari himpunan-himpunan yang tidak lepas (*disjoint*, saling asing) digunakan prinsip inklusi – eksklusi, atau disebut juga metode saringan (*sieve method*)

Teorema 2.1

Jika A dan B adalah himpunan-himpunan bagian terhingga dari himpunan semesta S dan $A \cap B \neq \varnothing$, maka:

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Bukti:



Menurut prinsip penjumlahan dapat ditentukan bahwa:

$$|A \cup B| = |A \cap \bar{B}| + |A \cap B| + |\bar{A} \cap B|$$

$$= |A \cap \bar{B}| + |A \cap B| + |\bar{A} \cap B| +$$

$$|A \cap B| \, |A \cap B|$$

$$= (|A \cap \bar{B}| + |A \cap B|) + (|A \cap \bar{B}| +$$

$$|A \cap B|) - |A \cap B|$$

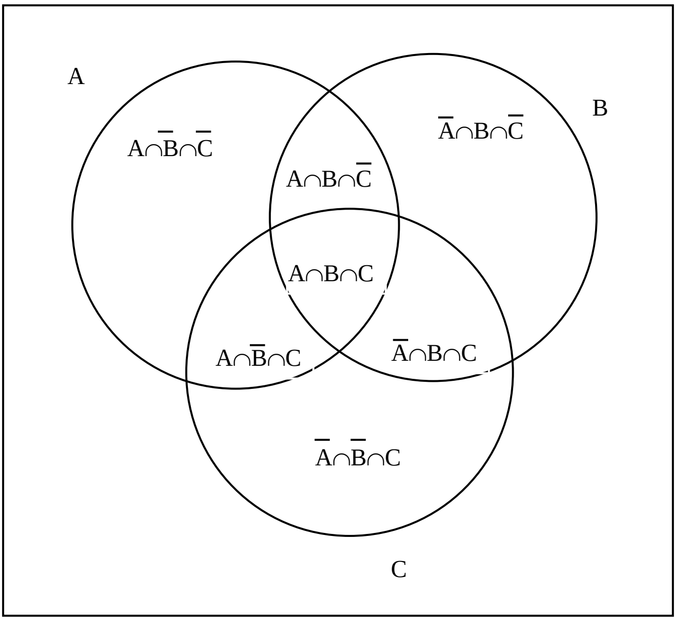
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

Teorema 2.2

Jika *A*, *B*, dan *C* adalah himpunan-himpunan bagian terhingga dari himpunan semesta S dan ketiganya tidak saling asing, maka:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

Bukti:



$$
\begin{aligned}
|A\cup B\cup C| = {} & |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}| + |\bar{A}\cap B\cap \bar{C}| + |\bar{A}\cap \bar{B}\cap C| + |A\cap B\cap \bar{C}| + \\
& |A\cap B\cap C| + |A\cap \bar{B}\cap C| + |\bar{A}\cap B\cap C| \\
= {} & |A\cap \bar{B}\cap \bar{C}| + |A\cap B\cap \bar{C}| + |A\cap B\cap C| + |A\cap \bar{B}\cap C| + \\
& |\bar{A}\cap B\cap \bar{C}| + |A\cap B\cap \bar{C}| + |A\cap B\cap C| + |\bar{A}\cap B\cap C| - \\
& |A\cap B\cap \bar{C}| - |A\cap B\cap C| - |\bar{A}\cap \bar{B}\cap C| + |A\cap \bar{B}\cap C| + \\
& |A\cap B\cap C| + |\bar{A}\cap B\cap C| - |A\cap B\cap C| - |A\cap \bar{B}\cap C| - \\
& |\bar{A}\cap B\cap C| \\
= {} & |A| + |B| + |C| - |A\cap B\cap \bar{C}| - |A\cap B\cap C| - |A\cap B\cap C| - \\
& |A\cap \bar{B}\cap C| - |\bar{A}\cap B\cap C| \\
= {} & |A| + |B| + |C| - \left(|A\cap B\cap \bar{C}| + |A\cap B\cap C|\right) - \left(|A\cap B\cap C| + \right. \\
& \left. |\bar{A}\cap B\cap C\right) - |A\cap \bar{B}\cap C| \\
= {} & |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap \bar{B}\cap C| - |A\cap B\cap C| + \\
& |A\cap B\cap C|
\end{aligned}
$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - |A\cap B| - |B\cap C| - |A\cap C| + |A\cap B\cap C|$$

Jika proses serupa dilakukan, maka dapat ditentukan bahwa banyaknya unsur dari gabungan n himpunan adalah:

$$\left|\bigcup_{i-1}^{n} A_i\right| = |A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{i\neq j} |A_i \cap A_j| + \sum_{i\neq j\neq k} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \ \ldots \ + (-1)^{n-1} \left|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right|$$

Contoh 2.14

Dari suatu kelas 6 SD diketahui bahwa terdapat 23 orang siswa yang senang matematika, 13 orang siswa senang IPA, dan 8 orang siswa senang Matematika dan IPA. Banyaknya siswa di dalam kelas 6 dapat dicari sebagai berikut:

Misalkan A adalah himpunan siswa yang senang matematika, dan B adalah himpunan siswa yang senang IPA, maka $|A| = 25,$ $|B| = 13,$ dan $|A\cap B| = 8,$ sehingga $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B| = 25 + 13 - 8 = 30$

Jadi banyaknya siswa kelas 6 di dalam kelas adalah 30 orang

Contoh 2.15

Dari semua 200 orang siswa di suatu sekolah dasar, terdapat 95 orang siswa suka olahraga bulu tangkis, 85 orang siswa suka olahraga sepak bola, dan 30 orang siswa suka olahraga keduanya. Banyaknya siswa yang tidak suka olahraga keduanya dicari sebagai berikut:

Misalkan A adalah himpunan siswa yang suka olahraga bulu tangkis, dan *B* adalah himpunan siswa yang suka olahraga sepak bola, maka $|A| = 95, |B| = 85,$ dan $|A \cap B| = 30,$

sehingga: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = 95 + 85 - 30 = 150$

Jadi banyaknya siswa sekolah dasar yang tidak suka bulu tangkis maupun sepak bola adalah 200 – 150 = 50 orang.

Contoh 2.16

Prinsip inklusi-eksklusi untuk empat unsur dapat ditunjukkan sebagai berikut:

$$\bigcup_{i=1}^{4} | A_i | = | \bigcup_{i=1}^{4} A_i | = | A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 |$$

$$= \sum_{i=1}^{4} | A_1 | - \sum_{i \neq j} | A_i \cap A_j | + \sum_{i \neq j \neq k} | A_1 \cap A_j \cap A_k | + (-1)^{4-1} | \bigcap_{i=1}^{4} A_1 |$$

$$= | A_1 | + | A_2 | + | A_3 | + | A_4 | - (| A_1 \cap A_2 | + | A_1 \cap A_3 | +$$
$$| A_1 \cap A_4 | + | A_2 \cap A_3 | + | A_2 \cap A_4 | + | A_3 \cap A_4 |) +$$
$$(| A_1 \cap A_2 \cap A_3 | + | A_1 \cap A_2 \cap A_4 | + | A_1 \cap A_3 \cap A_4 | +$$
$$| A_2 \cap A_3 \cap A_4 |) - | A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 |$$

$$= |A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4| - |A_1 \cap A_2|| - |A_1 \cap A_3| - |A_1 \cap A_4| -$$
$$| A_2 \cap A_3 | - | A_2 \cap A_4 | - | A_3 \cap A_4 | + | A_1 \cap A_2 \cap A_3 | +$$
$$| A_1 \cap A_2 \cap A_4 | + | A_1 \cap A_3 \cap A_4 | + | A_2 \cap A_3 \cap A_4 | -$$
$$| A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 |$$

D. PRINSIP KANDANG MERPATI (*THE PIGEONHOLE PRINCIPLE, THE DIRICHLET BOX PRINCIPLE*)

Prinsip kandang merpati merupakan prinsip yang dapat digunakan untuk mengetahui perhitungan minimal hasil membilang dari suatu keadaan yang sedang berlangsung. Meskipun jawaban terdapat suatu masalah dengan menggunakan prinsip ini dapat mengundang keragu-raguan, jawaban itu merupakan estimasi yang paling tepat terutama dalam menduga atau memperkirakan nilai terkecil yang harus dipenuhi.

Secara sederhana peragaan dari prinsip kandang merpati menyebutkan bahwa jika jumlah merpati lebih banyak dari jumlah kandang mereka (semua merpati masuk kandang, dan setiap kandang memuat semua merpati), maka paling sedikit ada satu kandang yang berisi paling sedikit dua merpati.

Teorema 2.3

Jika k + 1 atau lebih objek dimasukkan ke dalam k kotak, maka paling sedikit ada satu kotak yang berisi satu atau lebih objek.

Bukti:

Anggaplah bahwa tidak satupun kotak yang berisi lebih dari satu objek, maka setiap kotak berisi satu objek atau kosong, berarti setiap kotak paling banyak berisi satu objek. Dengan demikian, untuk k kotak, seluruhnya akan memuat paling banyak k objek. Hal ini bertentangan dengan keadaan semua objek sebanyak k + 1 harus masuk kotak.

Contoh 2.17

Dari delapan orang yang tersedia, tentu paling sedikit ada dua orang yang lahir pada hari yang sama. Keadaan ini dapat dijelaskan sebagai delapan objek yang dimasukkan ke dalam tujuh kotak (nama-nama hari dalam satu minggu)

Ini berarti paling sedikit ada satu kotak (hari) yang berisi paling sedikit dua orang.

Contoh 2.18

Dalam suatu ujian, skor yang digunakan guru dalam memeriksa pekerjaan siswa dengan menggunakan skala 1 – 10. Jika terdapat paling sedikit dua orang siswa yang mempunyai skor sama, maka banyaknya peserta ujian minimal adalah 11 orang. Semua peserta ujian dipandang sebagai objek yang dimasukkan kotak (skor).

Sebelum membahas teorema berikutnya, marilah kita lihat dua fungsi penting dalam matematika diskrit, yaitu fungsi lantai dan fungsi atap.

$f(x) = \lfloor x \rfloor$ disebut fungsi lantai (*floor function*)

= bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan x.

$g(x) = \lceil x \rceil$ disebut fungsi atap (*ceiling function*)

= bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan x

Contoh 2.19

$\left\lfloor \frac{1}{3} \right\rfloor$ = bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan $\frac{1}{3} = 0$

$\lfloor 2,5 \rfloor$ = bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan 2,5 = 2

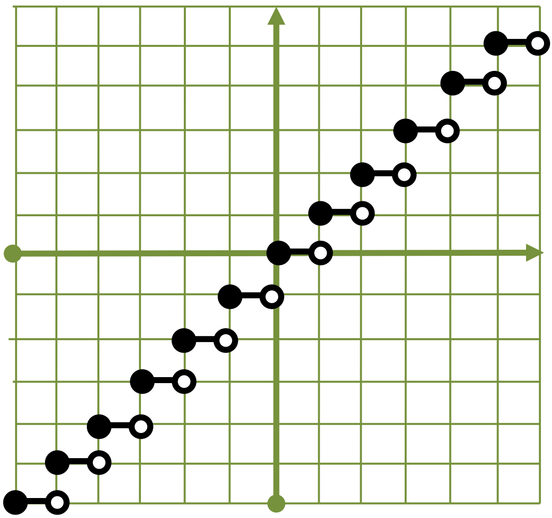
$\left\lfloor -1\frac{1}{4} \right\rfloor$ = bilangan bulat terbesar kurang dari atau sama dengan $-1\frac{1}{4} = -2$

$\left\lceil \frac{1}{3} \right\rceil$ = bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan $\frac{1}{3} = 1$

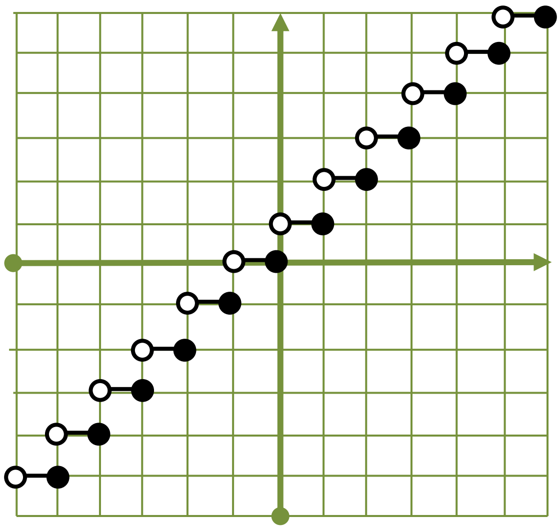
$\lceil 2,5 \rceil$ = bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan 2,5 = 3

$\left\lceil -1\frac{1}{4} \right\rceil$ = bilangan bulat terkecil lebih dari atau sama dengan $-1\frac{1}{4} = -1$

Dalam banyak buku, fungsi lantai disebut juga dengan fungsi tangga (*step function*), dan dilambangkan dengan $f(x) = [x]$. Grafik dari fungsi tangga (lantai) dan fungsi atap adalah sebagai berikut:



Grafik Fungsi Tangga $f(x) = \lfloor x \rfloor = [x]$



Grafik Fungsi Atap $g(x) = \lceil x \rceil$

Untuk memahami teorema 2.4, marilah kita perhatikan peragaan berikut:

Misalkan terdapat 7 merpati, dan tiga 3 kandang merpati, setiap kandang dapat memuat 7 merpati, dan semua merpati mengandang. Situasi mengandangnya merpati, secara sistematis dapat didaftar sebagai berikut::

(7,0,0) , (6,1,0) , (6,0,1) , (5,2,0) , (5,1,1) , (5,0,2) ,
(4,3,0) , (4,2,1) , (4,1,2) , (4,0,3) , (3,4,0) , (3,3,1) ,
(3,2,2) , (3,1,3) , (3,0,4) , (2,5,0) , (2,4,1) , (2,3,2) ,
(2,2,3) , (2,1,4) , (2,0,5) , (1,6,0) , (1,5,1) , (1,4,2) ,
(1,3,3) , (1,2,4) , (1,1,5) , (1,0,6) , (0,7,0) , (0,6,1) ,
(0,5,2) , (0,4,3) , (0,3,4) , (0,2,5) , (0,1,6) , (0,0,7)

Dengan demikian ada 36 cara merpati mengandang, dan setiap cara selalu paling sedikit ada kandang yang berisi paling sedikit $\left\lfloor \frac{7}{3} \right\rfloor = 2$ merpati

Teorema 2.4

Jika N objek dimasukkan dalam k kotak, maka paling sedikit ada satu kotak yang berisi paling sedikit $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil$ objek.

Bukti:

Anggaplah bahwa tidak satupun kotak yang berisi tidak lebih dari $\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1$ objek, maka banyaknya seluruh objek maksimal adalah $k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right)$, dan karena $k\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil - 1\right) < k\left\{\left(\left\lceil \frac{N}{k} \right\rceil + 1\right) - 1\right\} = N$ maka hal ini bertentangan karena banyaknya seluruh objek maksimal adalah *N*, dan bukan kurang dari *N*.

Contoh 2.16

Terdapat 23 objek untuk dimasukkan dalam 10 kotak

Maka $\left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil = \lceil 2{,}3 \rceil = 3, \left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil - 1 = 3 - 1 = 2, (23/10) + 1 = 3{,}3$

dan $\left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil < \left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil + 1$

Anggaplah bahwa tidak satupun kotak yang berisi paling sedikit $\left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil = \lceil 2{,}3 \rceil = 3$ kotak, atau tidak satupun kotak yang berisi lebih dari $2 = 3 - 1 = \left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil - 1$

Maka banyaknya seluruh objek maksimal adalah

$$10 \,.\, 2 = 10\left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil - 1 < 10\left(\left(\left\lceil \frac{23}{10} \right\rceil + 1\right) - 1\right) = 23$$

Hal ini bertentangan karena banyaknya seluruh objek adalah 23.

Contoh 2.17

Dari 200 orang siswa sekolah dasar, tentu paling sedikit terdapat suatu bulan yang "dimiliki" oleh $\left\lceil \frac{200}{12} \right\rceil = \left\lceil 16\frac{2}{3} \right\rceil = 17$ orang siswa, artinya paling sedikit ada 17 siswa yang lahir pada suatu bulan yang sama.

Untuk mengakhiri uraian pada modul 1, marilah kita lihat kegunaan dari fungsi bilangan bulat terbesar untuk membulatkan bilangan ke banyaknya angka desimal.

1. Makna dari $f(x) = [x+0,5]$

   Ambil $x = (25,37), (253,7), (0,81), (0,47),$ maka secara berturut-turut dapat dicari:

   $$\begin{aligned}[x+0,5] &= [25,37+0,5]; [253,7+0,5]; [0,81+0,5]; [0,47+0,5] \\ &= [25,87]; [254,2], [1,31]; [0,97] \\ &= 25 \; ; \; 254 \; ; \; 1 \; ; \; 0\end{aligned}$$

   Dari empat hasil di atas, dapatkah Anda menyatakan kegunaan dari $[x+0,5]$? Ternyata kegunaan dari $f(x) = [x+0,5]$ adalah membulatkan (rounding) bilangan ke satuan terdekat (rounding to unit)

2. Makna dari $f(x) = 10[0,1x+0,5]$

   Ambil $x = (25,37), (253,7), (0,81), (3,47),$ maka secara berturut-turut dapat dicari:

   $$\begin{aligned}10[0,1x+0,5] &= 10[2,537+0,5], 10[25,37+0,5]; 10[0,081+0,5]; \\ &\quad\; 10[0,347+0,5] \\ &= 10[3,037]; 10[25,87]; 10[0,581]; 10[0,847] \\ &= 30; 250; 0; 0\end{aligned}$$

   Dari empat hasil di atas, dapatkah Anda menyatakan kegunaan dari $10[0.1\,x+0,5]$? Ternyata kegunaan dari $f(x) = 10[0,1x+0,5]$ adalah membulatkan bilangan ke puluhan terdekat (rounding to ten).

3. Makna dari $f(x) = 100[0,01\,x+0,5]$

   Silahkan diselidiki dengan menggunakan paling sedikit 3 contoh, kemudian simpulkan pola yang diperoleh berdasarkan hasil jawaban masing-masing contoh. Jika Anda benar melakukan penyelidikan, maka kesimpulan Anda tentunya adalah: membulatkan ke ratusan terdekat (rounding to hundred)

4. Makna dari $f(x) = 0{,}1[10x + 0{,}5]$

Ambil $x = (25{,}37),\ (253{,}72),\ (0{,}81),\ (0{,}47),$ maka secara berturut-turut dapat dicari:

$$0{,}1[10x + 0{,}5] = 0{,}1[253{,}7 + 0{,}5]\ ;\ 0{,}1[2537{,}2 + 0{,}5];\ 0.1[8{,}1 + 0{,}5];$$
$$0{,}1[4{,}7 + 0{,}5]$$
$$= 0{,}1[254{,}2];\ 0{,}1[2537{,}7],\ 0{,}1[8{,}6];\ 0{,}1[5{,}2]$$
$$= 25{,}4;\ 253.7;\ 0{,}8;\ 0{,}5$$

Dari empat hasil di atas, dapatkah Anda menyatakan kegunaan dari $0{,}1[10x\ +\ 0{,}5]$? Ternyata kegunaan dari $f(x) = .\ 0{,}1[10x + 0{,}5]$ adalah membulatkan ke persepuluhan terdekat (rounding to tenth).

Secara umum fungsi membulatkan dari fungsi tangga, digunakan dalam pemrograman komputer, dan dapat ditabelkan sebagai berikut:

No	**Fungsi f(x)**	**Membulatkan ke**
1	100[0,01x + 0,5]	Ratusan terdekat
2	10[0,1x + 0,5]	Puluhan terdekat
3	[x + 0,5]	Satuan terdekat
4	0,1[10x + 0,5]	Persepuluhan terdekat
5	0,01[100x + 0,5]	Perseratusan terdekat
6	0,001[1000x + 0,5]	Perseribuan terdekat
7	...	...

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Seorang anak akan memilih satu sepeda motor dari dua merek sepeda motor, yaitu Honda dan Yamaha. Banyaknya sepeda motor Honda yang tersedia lima buah, dan banyaknya sepeda motor Yamaha yang tersedia tiga buah. Tentukan banyaknya cara memilih sepeda motor!

2) Disuatu rak buku tersedia tiga buku IPA, empat buku matematika, dan dua buku IPS. Seorang mengambil satu buku dari rak itu. Tentukan banyaknya cara seluruh memilih buku!
3) Seseorang akan bepergian dari Surabaya ke Jakarta dengan menggunakan bis malam. Trayek bis malam dari Surabaya ke Jakarta dilayani oleh empat bis *A*, lima bis *B*, dan enam bis *C*. Tentukan banyak cara bepergian dengan bis!
4) Tentukan banyaknya alamat yang dapat disediakan dalam tiga *byte*!
5) Seorang anak diminta memilih dua mainan dari tiga jenis mainan, yaitu mainan *A*, mainan *B*, dan mainan *C*. Jika banyaknya mainan *A* adalah 3, banyaknya mainan *B* adalah 2, dan banyaknya mainan *C* adalah 4, maka tentukanlah banyaknya cara memilih mainan tersebut!
6) Tentukan banyaknya fungsi yang dapat dibuat dari A yang mempunyai 3 unsur, ke *B* yang mempunyai 2 unsur!
7) Tentukan *I* banyaknya fungsi 1 – 1 yang dapat dibuat dari *A* yang mempunyai 3 unsur, ke *B* yang mempunyai 4 unsur!
8) Tentukan banyaknya bilangan bulat positif yang mempunyai lambang dua angka berbeda dan tidak dimulai dengan lambang nol!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Banyak cara memilih satu sepeda motor adalah 5 + 3 = 8.
2) Banyak cara memilih satu buku adalah 3 + 4 + 2 = 9.
3) Banyak cara seseorang bepergian dari Surabaya ke Jakarta dengan bis adalah 4 + 5 + 6 = 15.
4) Banyaknya alamat yang disediakan dalam 3byte adalah 2^{24}.
5) Seorang anak dua mainan dari 3 jenis mainan; ada 3 mainan *A*, 2 mainan *B*, dan 4 mainan *C*.

   Banyak memilih 2 mainan dari *A* adalah $\binom{3}{2} = 3$

   Banyak memilih 2 mainan dari *B* adalah $\binom{2}{2} = 1$

   Banyak memilih 2 mainan dari *C* adalah $\binom{4}{2} = 6$

   Banyak memilih 2 mainan dari *A* dan B adalah 3 × 2 = 6
   Banyak memilih 2 mainan dari A dan C adalah 3 × 4 = 12

Banyak memilih 2 mainan dari B dan C adalah 2 × 4 = 8
Jadi banyaknya cara memilih 2 mainan dari 3 jenis mainan A, B dan C adalah 3 + 1 + 6 + 6 + 12 + 8 = 36.

6) Fungsi dari A ke B, dengan A terdiri dari 3 unsur dan B terdiri dari 2 unsur, banyaknya fungsi adalah 2 × 2 × 2 = 8.
7) Banyaknya fungsi 1 – 1 dari A yang terdiri dari 3 unsur ke B yang terdiri dari 4 unsur adalah 4 × 3 = 12.
8) Bilangan bulat positif yang terdiri dari dua angka berbeda:
Angka pertama terdiri dari 9 angka, angka kedua terdiri dari 9 angka. (Angka nol, tidak boleh menjadi angka pertama, tetapi boleh untuk menjadi angka kedua. Angka kedua tidak boleh ada yang sama dengan angka pertama). Jadi banyaknya bilangan tersebut adalah 9 × 9 = 81.
9) Carilah $f(x) = [x] = [x]$ dan $g(x) = [x]$ jika $x = -3,5; -0,7;\ 1,32;$
$2,765;\ 2\frac{2}{5}; -4\frac{3}{4}$
10) Gambarkan grafik fungsi $f(x) = [2x+6]$ dan $g(x) = [2x+6]$

RANGKUMAN

Pokok-pokok pembahasan dalam Kegiatan Belajar 2 yang perlu dimengerti adalah:

1. Pengertian prinsip penjumlahan.
2. Pengertian prinsip perkalian.
3. Penerapan prinsip penjumlahan untuk membilang banyaknya cara sesuatu dikerjakan.
4. Penerapan prinsip perkalian untuk membilang banyaknya cara sesuatu dikerjakan.
5. Penerapan prinsip penjumlahan dan perkalian untuk membilang banyaknya cara sesuatu dikerjakan
6. Pengertian fungsi atap dan fungsi lantai
7. Penerapan fungsi lantai (tangga) untuk membulatkan bilangan ke satuan (rounding to unit) terdekat, ke puluhan terdekat (rounding to ten, membulatkan ke satu tempat desimal), ke ratusan terdekat (rounding to hundred, membulatkan ke dua tempat desimal), ke persepuluhan terdekat (rounding to tenth), ke perseratusan terdekat (rounding to hundredth), dan seterusnya

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Seorang anak diminta mengambil sekaleng roti dari kalengan roti-roti Khong Guan, Roma, dan Monde. Jika banyaknya kaleng-kaleng roti Khong Guan adalah 3 kaleng, roti Roma adalah 4 kaleng, dan roti Monde adalah 5 kaleng, maka banyaknya cara mengambil adalah ….
   A. 60
   B. 20
   C. 15
   D. 12

2) Perjalanan dari kota A ke kota B setiap hari dapat ditempuh dengan menggunakan bis atau kereta api. Jika perjalanan dengan bis tersedia 10 trayek, dan perjalanan dengan kereta api tersedia 4 trayek, maka banyaknya seluruh perjalanan dari Kota A ke Kota B adalah ….
   A. 40
   B. 14
   C. 12
   D. 6

3) Satu *byte* dari suatu alamat terdiri dari angka 0 atau 1 sebanyak ….
   A. 1 angka
   B. 2 angka
   C. 4 angka
   D. 8 angka

4) Banyaknya alamat yang dapat disediakan dalam empat *byte* adalah ….
   A. 2^{24}
   B. 2^{32}
   C. 2^{8}
   D. 2^{16}

5) Banyaknya fungsi yang dapat dibuat dari A yang mempunyai 4 unsur, ke B yang mempunyai 3 unsur adalah ….
   A. 81
   B. 60
   C. 12
   D. 7

6) Banyaknya fungsi 1 – 1 yang dapat dibuat dari A yang mempunyai 3 unsur, ke B yang mempunyai 5 unsur adalah ….
   A. 125
   B. 60
   C. 15
   D. 8

7) Nomor telepon disuatu kota terdiri dari bilangan-bilangan 6 angka. Banyaknya sambungan nomor telepon yang disediakan adalah ….
   A. 900.000
   B. 100.000
   C. 90.000
   D. 9.000

8) Banyaknya cara mengambil satu kartu hati atau satu kartu as dari satu pak kartu bridge adalah ….
   A. 12
   B. 13
   C. 16
   D. 26

9) Banyaknya cara mengambil satu kartu bernomor 3 sampai 10 atau kartu King dari satu pak kartu bridge adalah ….
   A. 12
   B. 30
   C. 34
   D. 36

10) Banyaknya cara memperoleh jumlah 4 atau jumlah 8 dalam melempar dua dadu berbeda adalah ….
   A. 32
   B. 16
   C. 12
   D. 8

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A. $\sum_{t=2}^{5} 3 = 3+3+3+3 = 12$

2) C. $\prod_{k=3}^{6} 2 = 2 \,.\, 2 \,.\, 2 \,.\, 2 = 16$

3) D. $\sum_{r=1}^{5}\sum_{s=1}^{6} rs = \sum_{r=1}^{5}(r+2r+3r+4r+5r+6r) = \sum_{r=1}^{5} 21r = 21\sum_{r=1}^{5} r = 315$

4) D. $\sum_{s=1}^{3}\prod_{t=1}^{4} st = \sum_{s=1}^{3}\left(s\cdot 2s\cdot 3s\cdot 4s\right) = \sum_{s=1}^{3} 24s^4 = 24\sum_{s=1}^{3} s^4 = 2.352$

5) C. $\sum_{s=1}^{t}\frac{1}{s(s+1)} = \sum_{s=1}^{t}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right) = \frac{t}{t-1}$

6) D. $\sum_{k=1}^{50} k^2 = \frac{1}{6}(50)\ (50+1)\ (100+1) = \frac{1}{6}\times 50\times 51\times 1001 = 425425$

7) A. $\sum_{m=1}^{n} m(m+1) = \sum_{m=1}^{n}(m^2+m) = \sum_{m=1}^{n} m^2 + \sum_{m=1}^{n} m$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)$

$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+4) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$

8) C. $\sum_{r=0}^{10}(-2)^r = 1-2+4-8+16-32+64-128+256-512+1024 = 683$

9) A. $\sum_{n=3}^{10}(2n+1) = \sum_{n=1}^{8}(2(n+2)+1) = \sum_{n=1}^{8}(2n+5) = 2\sum_{n=1}^{8} n + 40$

$= 2\cdot\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 9 + 40 = 72 + 40 = 112$

10) C. $2+6+12+\ldots+110 = 1\,.\,2 + 2\,.\,3 + 3\,.\,4 + \ldots + 10\,.\,11$

$= \frac{1}{3}.\ 10\ .\ 11\ .\ 12 = 440$

Tes Formatif 2

1) D. $3 + 4 + 5 = 12$
2) B. $10 + 4 = 14$
3) D. satu *byte* terdiri dari 8 angka 0 atau 1
4) B. $2^8 \times 2^8 \times 2^8 \times 2^8 = 2^{32}$
5) A. $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$
6) B. $5 \times 4 \times 3 = 60$
7) A. $9 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 900.000$
8) C. Banyaknya kartu hati 13 (termasuk as hati), dan banyaknya as yang bukan hati 3, sehingga banyaknya cara $13 + 3 = 16$
9) D. Kartu bernomor 3 sampai 10 terdapat pada semua kartu hati, sekop, keriting, dan wajik (*red*), masing-masing sebanyak 8.
   Banyaknya kartu king adalah 4
   Jadi banyaknya cara adalah $32 + 4 = 36$
10) D. Pasangan jumlah empat adalah (1,3), (2,2), (3,1)
    Pasangan jumlah delapan adalah (2,6), (3,5), (4,4), (5,3), dan (6,2)
    Banyaknya cara adalah $3 + 5 = 8$

Daftar Pustaka

Grimaldi, R.P. 1989. *Discrete and Combinatorial Mathematics*, *An Applied Introduction*. New York: Addison – Wesley.

Johnsonbangh, R. 1993. *Discrete Mathematics*. New Jersey: Prentice – Hall.

Mott, J.L., Kandel, A. & Baker, T.P. 1983. *Discrete Mathematics for Computer Scientists Reston*. Prentice – Hall.

Rosen, K.H. 1988. *Discrete Mathematics and Its Applications*. New York: Random House.

Seymour, L. 1976. *Discrete Mathematics*: New York: Mc Graw – Hill.