MODUL 1

Konsep Dasar Peluang

Dra. Kusrini, M. Pd.

PENDAHULUAN

Modul ini berisi 3 Kegiatan Belajar. Dalam Kegiatan Belajar 1 Anda akan mempelajari Konsep Himpunan dan Pencacahan, dalam Kegiatan Belajar 2 Anda akan mempelajari Fungsi Peluang, dan dalam Kegiatan Belajar 3 Anda akan mempelajari Peluang Bersyarat.

Setelah mempelajari modul ini secara umum Anda diharapkan dapat menerapkan konsep peluang untuk memecahkan masalah statistika yang berkaitan dengan peluang.

Secara khusus, setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan dapat:

1. menguraikan konsep himpunan;
2. menentukan pencacahan yang meliputi perkalian, permutasi dan kombinasi;
3. menjelaskan percobaan acak, ruang contoh (ruang sampel), dan kejadian,
4. menentukan nilai peluang suatu kejadian;
5. menentukan peluang bersyarat;
6. menentukan dua kejadian yang bebas;
7. menguraikan konsep Teorema Bayes.

Selamat belajar, semoga Anda berhasil!

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan dan Pencacahan

A. HIMPUNAN

Pada bagian ini akan disajikan tentang konsep-konsep elementer teori himpunan yang sering digunakan dalam teori peluang.

Sebarang kumpulan dari objek yang terdefinisikan dengan baik disebut **himpunan**, sedangkan objek-objek tersebut dinamakan **elemen** atau **anggota himpunan**. Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital $A, B, C, D, \cdots$, sedangkan anggota dinyatakan dengan huruf kecil $a, b, c, d, \cdots$.

Ditulis: $p \in A$ jika p adalah anggota dari himpunan A.

Jika setiap anggota himpunan A juga menjadi anggota himpunan B, atau jika $p \in A$ maka $p \in B$, maka A disebut **himpunan bagian** dari B, atau A **termuat** di B, atau B **memuat** A dan dinyatakan dengan $A \subset B$ atau $B \subset A$.

Himpunan A sama dengan himpunan B, ditulis A = B, jika dan hanya jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B dan himpunan B merupakan himpunan bagian dari himpunan A.

Atau: himpunan A = B jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.

Jika **p bukan anggota himpunan A** ditulis $p \notin A$, **A bukan himpunan bagian B** ditulis $A \not\subset B$, dan **himpunan A tidak sama dengan B** ditulis $A \neq B$.

Untuk menyatakan suatu himpunan dapat dilakukan dengan cara mendaftar semua anggotanya atau dengan menyatakan syarat keanggotaannya.

Contoh 1.1

$A = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$ berarti A mempunyai anggota bilangan-bilangan 1, 2, 3, 4, dan 5.

$B = \{\ x \mid x \text{ bilangan asli antara 8 dan 12}\}$ berarti B adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah bilangan asli di antara 8 dan 12, atau $B = \{9, 10, 11\}$.

$1 \in A, 2 \in A, 3 \in A, 5 \in A, 6 \notin A$

$9 \in B, 10 \in B, 11 \in B, 1 \notin B, 2 \notin B.$

Suatu himpunan yang memuat semua objek yang dibicarakan disebut **Semesta Pembicaraan** dan dinyatakan dengan S. Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut **himpunan kosong** dan dinyatakan dengan Ø. Himpunan Ø ini merupakan himpunan bagian dari setiap himpunan. Jadi untuk sebarang himpunan A, berlaku $\varnothing \subset A \subset S$.

Contoh 1.2
Jika Semesta Pembicaraan adalah himpunan semua bilangan asli, maka $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$.

Himpunan $K = \{2,\ 4,\ 6\}$ merupakan himpunan bagian dari S, atau $K \subset S$.

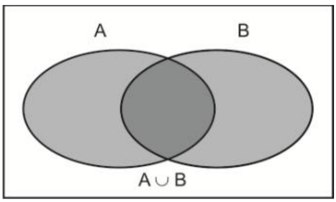
Jika M adalah himpunan bilangan genap yang kuadratnya sama dengan 3, maka $M = \varnothing$, karena tidak ada bilangan genap yang kuadratnya sama dengan 3.

Teorema 1.1
Jika A, B, dan C sebarang himpunan, maka:
a. $A \subset A$.
b. jika $A \subset B$ dan $B \subset A$ maka $A = B$.
c. jika $A \subset B$ dan $B \subset C$ maka $A \subset C$.

Di sini yang dimaksud $A \subset B$ adalah A himpunan bagian sejati dari B atau A sama dengan B.

Misal A dan B adalah sebarang himpunan.

Gabungan dari A dan B, yang dinyatakan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota A atau anggota B. Diagram Venn-nya seperti tampak pada gambar di samping.

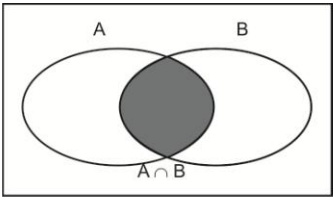


Yang diarsir adalah $A \cup B$ atau

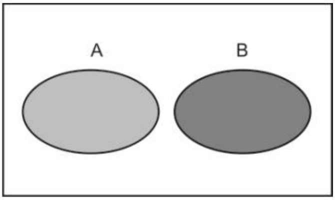
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}.$$

Interseksi dari A dan B, yang dinyatakan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota A yang juga merupakan anggota B. Diagram Venn nya seperti tampak pada gambar di samping, atau

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$$



Jika $A \cap B = \varnothing$, yaitu jika A dan B tidak mempunyai anggota persekutuan, maka A dan B disebut **saling asing** atau **lepas**. Diagram Venn-nya seperti tampak pada gambar di samping.

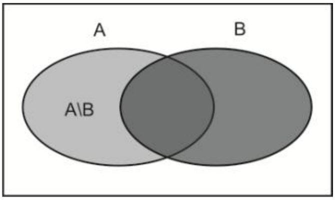


Selisih A dari B dinyatakan dengan $A \setminus B$, adalah himpunan yang anggotanya adalah anggota A tetapi bukan anggota B.

atau: $A \setminus B = \{x \mid x, A \text{ dan } x \notin B\}$

Tampak bahwa $A \setminus B$ saling asing dengan B, atau

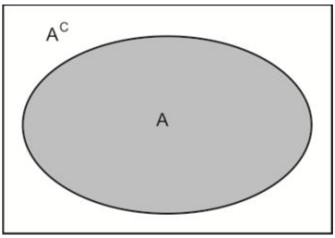
$$(A \setminus B) \cap B = \varnothing$$



Komplemen dari A, dinyatakan dengan A^c adalah himpunan yang anggotanya bukan anggota A. Jadi

$$A^c = \{x \mid x \in S, \ x \notin A\}.$$

Diagram Venn-nya seperti tampak pada gambar di samping.



Contoh 1.3
Misal $S = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $A = \{2, 4, 6, 8\}$, dan $B = \{6, 7, 8, 9, 10\}$.

$A \cup B = \{2, 4, 6, 7, 8, 9, 10\}$ $A \cap B = \{6, 8\}$
$A \setminus B = \{2, 4\}$ $B \setminus A = \{7, 9, 10\}$
$A^c = \{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, \cdots\}$

Himpunan-himpunan dengan operasi-operasi tersebut di muka memenuhi teorema berikut ini.

Teorema 1.2

a. Hukum Idempoten
1. $A \cup A = A$
2. $A \cap A = A$

b. Hukum Asosiatif
1. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
2. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

c. Hukum Komutatif
1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$

d. Hukum Distributif
1. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
2. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

e. Hukum Identitas
1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cup S = S$
3. $A \cap S = A$
4. $A \cap \varnothing = \varnothing$

f. Hukum Komplemen

1. $A \cup A^C = S$
2. $\left(A^C\right)^C = A$
3. $A \cap A^C = \varnothing$
4. $S^C = \varnothing,\ \varnothing^C = S$

g. Hukum De Morgan

1. $A \cup B^C = A^C \cap B^C$
2. $A \cap B^C = A^C \cup B^C$

Selanjutnya, jika $A \subset B$, maka dapat dibuktikan bahwa:

1. $A \cap B = A$
2. $A \cup B = B$
3. $B^C \subset A^C$
4. $A \cap B^C = \varnothing$
5. $B \cup A^C = S$

Suatu himpunan dapat **finit** atau **infinit**. Suatu himpunan dikatakan **finit** jika himpunan tersebut merupakan himpunan kosong atau memuat tepat n anggota, dengan n bilangan bulat positif. Jika suatu himpunan tidak finit, disebut **infinit**.

Suatu himpunan disebut **countable** jika himpunan tersebut finit atau dapat disusun sebagai barisan. Jika tidak countable disebut **uncountable.**

Misal A dan B merupakan dua himpunan. **Produk** dari A dan B dinyatakan dengan $A \times B$ adalah himpunan pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Suatu **partisi** dari himpunan X adalah suatu pembagian X ke dalam himpunan bagian-himpunan bagian dari X yang tidak kosong dan saling asing dan yang gabungannya sama dengan X sendiri.

Contoh 1.4

a. $A = \{2, 3, 5\}$ adalah himpunan finit dan juga *countable*.

b. $B = \{1, 3, 5, 7, \ldots\}$ adalah himpunan infinit dan juga *countable*.

c. R = himpunan bilangan real, adalah *uncountable*.

d. Jika $K = \{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$, maka $[\{2, 4\}, \{6\}, \{8, 10, 12\}]$ merupakan salah satu partisi dari X.

B. PENCACAHAN

1. Perkalian

Jika suatu prosedur dapat dinyatakan dalam n_1 cara berbeda dan dilanjutkan dengan prosedur kedua yang dapat dinyatakan dengan n_2 cara berbeda dan dilanjutkan dengan prosedur ketiga yang dinyatakan dengan n_3 cara berbeda dan seterusnya, maka banyak cara prosedur-prosedur tersebut dapat dinyatakan dengan hasil kali $n_1 . n_2 . n_3 \ldots$

Contoh 1.5

Misal plat nomor sebuah mobil terdiri atas 2 huruf berbeda dan 3 angka dengan angka pertama tidak nol. Berapa banyak plat nomor berbeda yang dapat dibuat?

Huruf pertama dapat dibuat dengan 26 cara berbeda, huruf kedua dengan 25 cara berbeda, angka pertama dengan 9 cara berbeda, angka kedua dengan 10 cara berbeda, dan angka ketiga dengan 10 cara berbeda.

Jadi, banyak plat nomor berbeda yang dapat dibuat adalah

$$26 \times 25 \times 9 \times 10 \times 10 = 585000 \text{ buah.}$$

2. Faktorial

Hasil kali dari bilangan-bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n, yaitu $1 . 2 . 3 \cdots (n-2) . (n-1) . n$ sering digunakan dalam matematika, yang diberi notasi n! (dibaca n faktorial).

Jadi, $\quad 1 . 2 . 3 \cdots (n-2)\ (n-1) . n = n!$

$$1 . 2 . 3 \cdots (n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2) \cdots 3 . 2 . 1.$$

Sehingga $n! = n(n-1)\ (n-2) \cdots 3 . 2 . 1.$

Dalam hal ini **didefinisikan**: $1! = 1$ dan $0! = 1$.

Contoh 1.6

1. $2! = 1 . 2 = 2 . 1 = 2$
2. $5! = 1 . 2 . 3 . 4 . 5 = 5 . 4 . 3 . 2 . 1 = 120$

3. Permutasi

Suatu susunan dari sekumpulan n objek dalam suatu urutan yang tertentu disebut suatu permutasi dari objek tersebut. Susunan dari sebarang r objek dari n objek $(r < n)$ dalam urutan yang tertentu disebut suatu permutasi r objek dari n objek yang diketahui.

Contoh 1.7

Perhatikan huruf-huruf a, b, c dan d. Maka:

1. bdca, dcba, dan acdb merupakan sebagian contoh permutasi-permutasi dari 4 huruf.
2. bad, adb, dan bca merupakan sebagian contoh permutasi-permutasi 3 huruf dari 4 huruf yang diketahui.
3. ad, cb, da, dan bd merupakan sebagian contoh permutasi-permutasi 2 huruf dari 4 huruf yang diketahui.

Banyaknya permutasi r objek dari n objek, diberi notasi $P(n,\ r)$.

Elemen pertama dari permutasi n objek dapat dipilih dalam n cara yang berbeda, berikutnya, elemen kedua dalam permutasi dapat dipilih dalam $n-1$ cara; dan berikutnya elemen ketiga dalam permutasi dapat dipilih dalam $n-2$ cara. Begitu seterusnya, dengan cara yang sama, kita dapatkan elemen ke–r (elemen yang terakhir) dalam permutasi r objek yang dapat dipilih dalam $n-(r-1)$ cara atau $n-(r-1)=n-r+1$ cara.

Teorema 1.3

$$P(n,\ r)=(n-1)(n-2)\ \cdots\ (n-r+1).$$

atau

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n\text{-}r)!}$$

Bukti

$$n(n-1)\ (n-2)\ \ldots\ (n-r+1) = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-r+1)(n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= \frac{n!}{(n-r)!}$$

Contoh 1.8

$$P(5, 3) = \frac{5!}{(5\text{-}3)!} = \frac{5!}{2!} = 60$$

Jika r = n, maka didapatkan:

$$P(n,\ n) = \frac{n!}{(n - n)!} = \frac{n!}{0!} = n!$$

Teorema akibat:

Ada n! permutasi dari n objek.

Contoh 1.9

Berapakah permutasi dari 3 objek?

Misalkan ketiga objek adalah a, b, dan c. Maka: $P(3,\ 3) = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 = 6$.

Jadi ada 6 permutasi, yaitu: abc, acb, bac, bca, cab, dan cba.

4. Permutasi dengan Pengulangan

Kadang-kadang kita ingin mengetahui banyaknya permutasi dari objek-objek yang beberapa di antaranya sama. Untuk itu digunakan teorema seperti berikut ini.

Teorema 1.4

Banyaknya permutasi dari n objek yang dari padanya terdapat n_1 objek sama, n_2 objek sama, …, n_r objek sama adalah:

$$\frac{n!}{n_1!, n_2!,\ ...,\ n_r!}.$$

Andaikan kita ingin membentuk semua kemungkinan dari 5 huruf yang terdapat pada kata MAMMI. Dalam kata MAMMI tersebut terdapat huruf yang sama, yaitu M sebanyak 3 buah. Jika ketiga huruf M tersebut dibedakan, yaitu $M_1, M_2, \text{dan } M_3$, maka ada $5! = 5 \,.\, 4 \,.\, 3 \,.\, 2 \,.\, 1 = 120$ permutasi dari huruf-huruf M_1, A, M_2, M_3, I.

Perhatikan keenam permutasi berikut ini.

$$\begin{array}{ll} M_1\,M_2\,M_3\,A\,I & M_1\,M_3\,M_2\,A\,I \\ M_2\,M_1\,M_3\,A\,I & M_2\,M_3\,M_1\,A\,I \\ M_3\,M_1\,M_2\,A\,I & M_3\,M_2\,M_1\,A\,I \end{array}$$

Jika indeksnya dihapus, maka keenam permutasi tersebut menjadi sama. Keenam permutasi tersebut berasal dari kenyataan bahwa ada $3! = 6$ cara yang berbeda dari penempatan 3 huruf M.

Oleh karena itu ada $\frac{5!}{3!} = \frac{120}{6} = 20$ permutasi yang dapat dibentuk oleh 5 huruf dari kata "MAMMI" tersebut.

Contoh 1.10

Hitunglah banyaknya permutasi berbeda yang dapat dibentuk dari semua huruf pada *tiap kata* berikut ini.

1. PERMUTASI.
2. MATEMATIKA.

Penyelesaian:

1) Kata **"PERMUTASI"** terdiri dari 9 huruf yang berbeda. Maka banyaknya permutasi dari ke−9 huruf yang terdapat dalam kata **"PERMUTASI"** = 9! = 362.880.
2) Kata **"MATEMATIKA"** terdiri dari 10 huruf, dan di antaranya ada huruf yang sama, yaitu huruf A (3 buah), huruf T (2 buah) dan huruf M (2 buah). Maka banyaknya permutasi dari ke−10 huruf pada kata **"MATEMATIKA"**.

$$\frac{10!}{3!2!2!} = \frac{10.9.8.7.6.5.4}{2.2} = 151.200.$$

5. Kombinasi

Misalkan kita mempunyai sebuah kumpulan n objek. Suatu kombinasi r objek dari n objek, adalah sebarang pemilihan r objek dari n objek di mana urutan tidak diperhatikan. Jadi, susunan ab dianggap sama dengan ba.

Notasi kombinasi r objek dari n objek adalah:

$$C(n , r) \text{ atau } \binom{n}{r} \text{ atau } C_r^n$$

Contoh 1.11
Banyaknya kombinasi 3 huruf dari huruf $a, b, c, \text{ dan } d$ adalah $abc,\ abd,\ acd,\ bcd$. Perhatikan bahwa kombinasi-kombinasi berikut $abc,\ acb,\ bac\ bca,\ cab,\ cba,$ ternyata terdiri dari huruf-huruf yang sama, yaitu $a, b \text{ dan } c$, karenanya dianggap sebagai satu kombinasi.
Jadi banyaknya kombinasi 3 huruf dari huruf $a,\ b,\ c,\ d$ adalah:

$$C(n , r) = C(4 , 3) = \binom{4}{3} = 4$$

Ternyata banyaknya kombinasi 3 huruf dari 4 huruf $a,\ b,\ c,\ d\ =\ 4,$ dan bahwa tiap kombinasi yang terdiri dari 3 huruf itu menentukan 6 permutasi (= 3!) dari huruf-huruf dalam kombinasi. Perhatikan diagram berikut.

Kombinasi	**Permutasi**
abc	abc, acb, bac, bca, cab, cba
abd	abd, adb, bad, bda, dab, dba
acd	acd, adc, cad, cda, dac, dca
bca	bcd, bdc, cdb, cdb, dbc, dcb

Jadi, bila banyaknya kombinasi 3 huruf dari 4 huruf dikalikan dengan 3! maka hasilnya sama dengan banyaknya permutasi 3 huruf dari 4 huruf.

$$C(4,\ 3)\ .\ 3!\ =\ P(4,\ 3)$$

atau

$$C(4,\ 3) = \frac{P(4,\ 3)}{3!}.$$

Karena tiap kombinasi r objek dari n objek menentukan r! permutasi dari objek-objek tersebut, kita dapat menyimpulkan bahwa

$$P(n, r) = r!C(n, r)$$

atau:

$$C(n, r) = \binom{n}{r} = \frac{P(n, r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

Ingat bahwa $P(n, r) = \dfrac{n!}{(n-r)!}$.

Contoh 1.12
Jika dari kepengurusan suatu organisasi yang terdiri dari 8 orang ingin membentuk pengurus inti 3 orang sebagai Ketua, Sekretaris dan Bendahara, maka dapat dibentuk:

$C(8,\ 3) = \binom{8}{3} = \dfrac{8!}{3!(8-3)!} = \dfrac{8!}{3!5!} = 56$ pengurus inti yang berbeda.

Teorema 1.5

$$C(n,\ n-r) = C(n,\ r)$$

Dapat dibuktikan sendiri**.**

Teorema 1.6

$$C(n+1,\ r) = C(n,\ r-1) + C(n,\ r)$$

Dapat dibuktikan sendiri.

Contoh 1.13

$$C(5, 3) = \frac{5!}{3!2!} = 10$$

$$C(5, 2) = \frac{5!}{2!3!} = 10$$

Jadi: $C(5, 3) = C(5, 2)$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1. Jika himpunan P = {3, 5, 7} dan Q = {a, b, c, d}, maka carilah P × Q!
2. Himpunan H = {a, b, c, d, e, f, g, h}. Berilah satu contoh partisi dari H!
3. Berapakah C (7, 2)?
4. Berapa banyak cara 5 orang dapat duduk dalam satu baris dengan 5 kursi?
5. Dari sekotak kelereng yang berisi 15 kelereng, secara acak diambil 2 buah kelereng. Ada berapa banyak cara 2 kelereng tersebut dapat terambil?

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $P\times Q=\{(3,a),(3,b),(3,c),(3,d),(5,a),(5,b),$
$(5,c),(5,d),(7,a),(7,b),(7,c),(7,d)\}.$
2) Salah satu contoh partisi dari H: $[\{a, b, c\},\{d, e\},\{f\},\{g, h\}]$.
3) C (7, 2) = 21.
4) Ada 5! = 120 cara.
5) C (15, 2) = 105 cara.

RANGKUMAN

A. Himpunan

Sebarang kumpulan dari objek yang terdefinisikan dengan baik disebut **himpunan**, sedangkan objek-objek tersebut dinamakan **elemen** atau **anggota** himpunan.

Himpunan dinyatakan dengan huruf kapital: A, B, C, D, …, sedangkan anggota dinyatakan dengan huruf kecil: a, b, c, d, ….

Ditulis: $p \in A$ jika p adalah anggota dari himpunan A.

Jika setiap anggota himpunan A juga menjadi anggota himpunan B, atau jika $p \in A$ maka $p \in B$, maka A disebut **himpunan bagian** dari B, atau

A **termuat** di B, atau B **memuat** A dan dinyatakan dengan $A \subset B$ **atau** $B \supset A$.
Himpunan A sama dengan himpunan B, ditulis $A = B$, jika dan hanya jika himpunan A merupakan himpunan bagian dari himpunan B dan himpunan B merupakan himpunan bagian dari himpunan A.
Atau: himpunan A = B jika dan hanya jika $A \subset B$ dan $B \subset A$.
Jika **p bukan anggota himpunan** A ditulis p $\notin$ A, A **bukan himpunan bagian** B ditulis $A \not\subset B$, dan himpunan A **tidak sama** dengan himpunan B ditulis $A \neq B$.
Untuk menyatakan suatu himpunan dapat dilakukan dengan cara mendaftar semua anggotanya atau dengan menyatakan syarat keanggotaannya.
Suatu himpunan yang memuat semua objek yang dibicarakan disebut **Semesta Pembicaraan** dan dinyatakan dengan S. Suatu himpunan yang tidak mempunyai anggota disebut **himpunan kosong** dan dinyatakan dengan Ø.
Gabungan dari A dan B, yang dinyatakan dengan $A \cup B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota A atau anggota B atau $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ atau } x \in B\}$.
Interseksi dari A dan B, yang dinyatakan dengan $A \cap B$ adalah himpunan yang anggota-anggotanya adalah anggota A yang juga merupakan anggota B atau $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ dan } x \in B\}$.
Jika A ∩ B = Ø, yaitu jika A dan B tidak mempunyai anggota persekutuan, maka A dan B disebut **saling asing** atau **lepas**.
Selisih A dari B dinyatakan dengan A(B, adalah himpunan yang anggotanya adalah anggota A tetapi bukan anggota B atau A\B = {x/ x , A dan x $\notin$ B}.
Komplemen dari A, dinyatakan dengan A^c adalah himpunan yang anggotanya bukan anggota A. Jadi, $A^c = \{x \mid x \in S, \; x \notin A\}$.

Suatu himpunan dapat **finit** atau **infinit**. Suatu himpunan dikatakan **finit** jika himpunan tersebut merupakan himpunan kosong atau memuat tepat n anggota, dengan n bilangan bulat positif. Jika suatu himpunan tidak finit, disebut **infinit**.

Suatu himpunan disebut **countable** jika himpunan tersebut finit atau dapat disusun sebagai barisan. Jika tidak countable disebut **uncountable**.
Misal A dan B merupakan dua himpunan. **Produk** dari A dan B dinyatakan dengan $A \times B$ adalah himpunan pasangan berurutan (a, b) dengan $a \in A$ dan $b \in B$.

Suatu **partisi** dari himpunan X adalah suatu pembagian X ke dalam himpunan bagian-himpunan bagian dari X yang tidak kosong dan saling asing dan yang gabungannya sama dengan X sendiri.

B. Pencacahan

1. Perkalian
   Jika suatu prosedur dapat dinyatakan dalam n_1 cara berbeda dan dilanjutkan dengan prosedur kedua yang dapat dinyatakan dengan n_2 cara berbeda dan dilanjutkan dengan prosedur ketiga yang dinyatakan dengan n_3 cara berbeda dan seterusnya, maka banyaknya cara prosedur-prosedur tersebut dapat dinyatakan dengan hasil kali $n_1 \,.\, n_2 \,.\, n_3 \,\ldots$
2. Faktorial
   Hasil kali dari bilangan-bilangan bulat positif dari 1 sampai dengan n, yaitu $1.2.3\ldots(n-2).(n-1)$. n sering digunakan dalam matematika, yang diberi notasi n! (*dibaca* n faktorial). Jadi,
   $1.2.3\ldots(n-2)(n-1).n = n!$
   $1.2.3\ldots(n-2)(n-1)n = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$.
   Sehingga
   $n! = n(n-1)(n-2)\ldots3.2.1$.
   Dalam hal ini **didefinisikan: 1!** = 1 dan 0! = 1.
3. Permutasi
   Suatu susunan dari sekumpulan n objek dalam suatu urutan yang tertentu disebut suatu permutasi dari objek tersebut. Susunan sebarang r objek dari n objek $(r < n)$ dalam urutan yang tertentu disebut suatu permutasi r objek dari n objek yang diketahui.
4. Permutasi dengan Pengulangan
   Banyaknya permutasi dari n objek yang dari padanya terdapat n_1 objek sama, n_2 objek sama, …, n_r objek sama adalah:

$$\frac{n!}{n_1!.n_2! \ldots n_r!}$$

5. Kombinasi
   Misalkan kita mempunyai sebuah kumpulan n objek. Suatu kombinasi r objek dari n objek, adalah sebarang pemilihan r objek dari n objek di mana urutan tidak diperhatikan. Jadi susunan ab dianggap sama dengan ba.

Notasi kombinasi r objek dari n objek adalah

$$C(n,\ r) \text{ atau } \binom{n}{r} \text{ atau } C_r^n$$

TES FORMATIF 1

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika K = {1, 3, 5} dan L = {4, 6, 8}, maka K × L = ….
   A. {4, 18, 40}
   B. {(1, 4),(3, 6),(5, 8)}
   C. {(1, 4),(1, 6),(1, 8),(3, 4),(3, 6),(3, 8),(5, 4),(5, 6),(5, 8)}
   D. {(4, 1),(6, 1),(8, 1),(4, 3),(6, 3),(8, 3),(4, 5),(6, 5),(8, 5)}

2) Jika X = {p, q, r, s, t, u}, maka yang merupakan partisi dari X adalah ….
   A. [{p, q, r, s, t},{u}]
   B. [{p, q, r}, t, u]
   C. [q, r, s, t, u]
   D. [(p, q), (r, s), (t, u)]

3) Sebuah kopor mempunyai kunci kombinasi yang terdiri atas 3 angka dari 0 sampai 5. Banyak kunci kombinasi yang mungkin adalah ….
   A. 15
   B. 18
   C. 125
   D. 216

4) Ada 6 orang yang akan antri untuk membeli tiket bioskop. Banyak cara ke 6 orang tersebut antri ada ….
   A. 6 cara
   B. 36 cara
   C. 216 cara
   D. 720 cara

5) Dari suatu kelas yang terdiri atas 20 siswa secara acak ditunjuk 2 orang untuk mewakili kelas tersebut. Banyak cara menunjuk 2 orang tersebut ada ….
   A. 10 cara
   B. 20 cara
   C. 40 cara
   D. 190 cara

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\boxed{\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%}$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Fungsi Peluang

A. RUANG SAMPEL DAN KEJADIAN

Dari pandangan intuitif, peluang terjadinya suatu peristiwa atau kejadian adalah nilai yang menunjukkan seberapa besar kemungkinan peristiwa itu akan terjadi. Misalnya, peluang yang rendah menunjukkan kemungkinan terjadinya peristiwa itu sangat kecil.

Konsep peluang berhubungan dengan pengertian **percobaan** yang menghasilkan "hasil" yang tidak pasti. Artinya, percobaan yang diulang-ulang dalam kondisi yang sama akan memberikan "hasil" yang dapat berbeda-beda. Istilah percobaan yang kita gunakan di sini tidak terbatas pada percobaan dalam laboratorium, melainkan percobaan kita artikan sebagai prosedur yang dijalankan pada kondisi tertentu, di mana kondisi itu dapat diulang-ulang beberapa kali pada kondisi yang sama, dan setelah prosedur itu selesai berbagai hasil dapat diamati.

Beberapa pengertian/definisi

Himpunan S dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan yang diberikan disebut *ruang sampel (contoh).* Suatu hasil yang khusus, yaitu suatu elemen dalam S, disebut suatu *titik sampel*. Suatu kejadian A adalah suatu himpunan bagian dari ruang sampel S. Kejadian {a} yang terdiri atas suatu titik sampel tunggal $a \in S$ disebut suatu *kejadian yang elementer (sederhana)*. Himpunan kosong Φ dan ruang sampel S sendiri merupakan kejadian-kejadian, Φ kadang-kadang disebut sebagai kejadian yang *tidak mungkin terjadi* dan S merupakan kejadian yang *pasti terjadi*.

Notasi yang biasa digunakan adalah sebagai berikut.

1. Ruang sampel: S.
2. Kejadian dengan huruf-huruf kapital, seperti: A, B, …, X, Y, Z.
3. Titik sampel dengan huruf-huruf kecil, seperti a, b, …, y, z atau dengan: $a_1, a_2, \ldots x_1, x_2, \ldots, x_n$ ….

Contoh 1.14

Percobaan:
Melambungkan sebuah dadu satu kali dan dilihat banyaknya mata dadu yang tampak/muncul (yaitu yang di atas). Dari percobaan dapat diidentifikasikan yang dimaksud dengan ruang sampel, titik sampel dan kejadian yaitu:

Ruang sampel:
Dadu mempunyai 6 sisi, dan masing-masing sisi bermata satu, dua, tiga, empat, lima dan enam. Himpunan semua hasil yang mungkin dari lambungan tersebut adalah: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Jadi ruang sampelnya: S = {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Titik sampel:
Titik sampel merupakan suatu elemen dari ruang sampel S. elemen-elemen dari S adalah: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Jadi, titik sampelnya: 1 atau 2 atau 3 atau 4 atau 5 atau 6.

Kejadian:

Kejadian merupakan himpunan bagian dari ruang sampel.
Misalkan pada percobaan pelemparan sebuah dadu.
A = kejadian bahwa muncul mata genap = {2, 4, 6}
B = kejadian bahwa muncul mata ganjil = {1, 3, 5}
C = kejadian bahwa muncul mata prima = {2, 3, 5}
Kejadian yang sederhana adalah kejadian yang terdiri atas satu titik sampel.
Misalkan:
D = kejadian bahwa muncul mata prima yang genap. Maka D = {2}.

B. DEFINISI PELUANG/KEMUNGKINAN

Misal dalam percobaan pelemparan/lambungan sebuah dadu diperhatikan banyaknya mata yang muncul. Misalkan A adalah kejadian bahwa muncul (tampak) mata genap. Maka $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ dan $A = \{2, 4, 6\}$.

Tiap-tiap elemen S dianggap mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Hal yang penting dalam masalah ini adalah perbandingan antara banyaknya elemen dalam A, yaitu n(A) dan banyaknya elemen dalam S, yaitu n(S); n(S) = 6.

$$\frac{n(A)}{n(S)} = \frac{\text{banyaknya elemen dalam A}}{\text{banyaknya elemen dalam S}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Angka perbandingan ini, yaitu $\frac{1}{2}$, dinamakan peluang/kemungkinan terjadinya kejadian A.

Definisi 1.1

Misalkan suatu ruang sampel S mempunyai elemen yang banyaknya berhingga, yaitu n(S) = N, dan tiap-tiap elemen dari S mempunyai kemungkinan sama untuk terjadi. Misalkan pula A adalah suatu kejadian (himpunan bagian dari S), yang mempunyai elemen sebanyak n(A). Maka peluang bahwa kejadian A akan terjadi $[P(A)]$, didefinisikan sebagai:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)}$$

Contoh 1.15

Jika dua buah dadu dilambungkan bersama-sama satu kali, dan A kejadian bahwa jumlah mata yang muncul dari kedua dadu sama dengan 8. Kita lihat hasil yang mungkin dari lambungan kedua dadu tersebut.

		Dadu II					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
Dadu I	**3**	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Titik sampelnya merupakan pasangan-pasangan mata dadu yang muncul dari kedua dadu tersebut. Titik sampel (a, b) dimaksudkan a merupakan mata dadu yang muncul pada dadu I dan b merupakan mata dadu yang muncul pada dadu II.

Ruang sampel

$S = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ \cdots,\ (6,5),\ (6,6)\}$, dan $n(S) = 36$.

Kejadian A = kejadian bahwa jumlah mata yang muncul sama dengan 8.

A = {(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)}, dan n (A) = 5.

Karena n (S) = 36 dan n (A) = 5, maka peluang terjadinya peristiwa/kejadian A adalah:

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{5}{36}.$$

Contoh 1.16

Sebuah kotak berisi 100 bola, di antaranya terdapat sebanyak 40 bola putih dan sisanya, yaitu 60 bola merupakan bola merah. Semua bola dalam kotak dicampur. Kemudian dari dalam kotak tersebut diambil satu bola tanpa melihat terlebih dahulu. Misalkan, kejadian A adalah kejadian bahwa bola yang terambil putih dan B adalah kejadian bahwa bola yang terambil merah. Maka,

Peluang dari kejadian A, yaitu P(A).

$$P(A) = \frac{\text{banyaknya bola putih dalam kotak}}{\text{banyaknya bola dalam kotak}} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$$

Peluang dari kejadian B, yaitu P(B).

$$P(B) = \frac{\text{banyaknya bola merah dalam kotak}}{\text{banyaknya bola dalam kotak}} = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

Definisi 1.2

Dua peristiwa A dan B yang tidak mempunyai elemen yang berserikat, yaitu: $A \cap B = \varnothing$ dinamakan dua peristiwa yang saling asing (atau "*disjoint*").

Contoh 1.17
Jika dua buah dadu dilambungkan satu kali, dan dilihat pasangan mata dadu yang muncul/tampak.
A = kejadian bahwa jumlah mata dadu yang muncul 8.
B = kejadian bahwa jumlah mata dadu yang muncul kurang dari 5.
Maka:

$$A = \{(6,2),\ (5,3),\ (4,4),\ (3,5),\ (2,6)\}$$

$$B = \{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),(3,1),\ (2,2),\ (1,3)\}$$

$$A \cap B = \varnothing.$$

Jadi, kejadian A dan B saling asing/*disjoint*.

Kita akan menganalisis konsep peluang dengan anggapan bahwa ruang sampel S memuat berhingga banyaknya hasil yang mungkin terjadi dan semuanya berkemungkinan sama untuk terjadi. Kemudian, untuk peluang kejadian A, kita gunakan definisi 1.1. Dengan dasar ini kita akan menyajikan beberapa aksioma peluang yang sangat penting tanpa mengingat percobaannya, dan kemungkinan terjadinya tiap peristiwa yang ada tidak harus sama.

Definisi 1.3

Misal S adalah ruang sampel dan A adalah sebarang kejadian dalam S. Maka P disebut fungsi peluang pada ruang sampel S apabila dipenuhi aksioma-aksioma berikut.

(**Aksioma 1.1**). Untuk setiap kejadian A, $0 \le P(A) \le 1$

(**Aksioma 1.2**). $P(S) = 1$

(**Aksioma 1.3**). Jika A dan B dua kejadian yang *saling asing* maka:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

(**Aksioma 1.4**). Jika A_1, A_2, …, merupakan deretan kejadian yang **saling asing** maka:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Contoh 1.18

Kita lihat kembali Contoh 1.17:

A = {(6,2), (5,3), (4,4), (3,5), (2,6)}; n(A) = 5; P(A) = $\frac{5}{36}$.

B = {(1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (1,3), (3,1)}; n(B) = 6; P(B) = $\frac{6}{36}$.

Karena A dan B **saling asing** $(A \cap B = \varnothing)$ maka menurut **aksioma 1.3**

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{5}{36} + \frac{6}{36} = \frac{11}{36}.$$

Selanjutnya, berdasarkan aksioma-aksioma tersebut dapat kita buktikan teorema-teorema berikut ini.

Teorema 1.7

$$P(\varnothing) = 0$$

Bukti:

Misalkan A sebarang kejadian (himpunan bagian dari S), maka $A \cup \varnothing = A$.

Dengan **Aksioma 1.3** $P(A) = P(A) \cup \varnothing = P(A) + P(\varnothing)$

$P(A) = P(A) + P(\varnothing)$. Jadi didapatkan: $P(\varnothing) = 0$.

Teorema 1.8

$P(A^c) = 1 - P(A)$.

Bukti:

$S = A \cup A^c$; di mana A dan A^c saling asing

Dari **Aksioma 1.2**: P(S) = 1

Karena $S = A \cup A^c$, maka menurut **aksioma 1.3**.

$1 = P(S) = P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

atau

$1 = P(A) + P(A^c)$. Jadi $P(A^c) = 1 – P(A)$

Contoh 1.19
Satu dadu yang setimbang dilambungkan satu kali, perhatikan mata dadu yang muncul.
A = kejadian bahwa muncul mata prima. Maka:

$$A = \{2, 3, 5\};\ P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

A^c = kejadian muncul mata tidak prima. Maka:

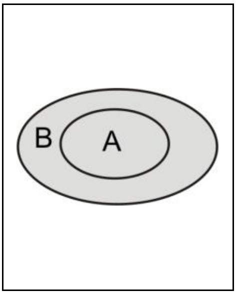
$$A^c = \{1, 4, 6\} \text{ dan } P(A^c) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \text{ atau}$$

Dengan **Teorema 1.2**: $P(A^c) = 1 - P(A)$, maka:

$$P(A^c) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Teorema 1.9
Jika $A \subset B$ maka $P(A) \leq P(B)$.

Bukti:



Jika $A \subset B$, maka B dapat dinyatakan ke dalam 2 kejadian, yaitu: A dan $B \backslash A$, yang saling asing, atau $B = A \cup (B \backslash A)$.

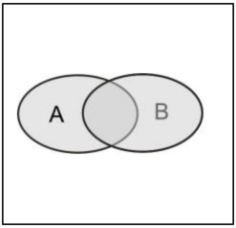
Jadi, $P(B) = P(A) + P(B \backslash A)$.

Menurut **Aksioma 1.1**:
$0 \leq P(B \backslash A) \leq 1$. Maka berarti bahwa
$P(B) \geq P(A)$; atau $P(A) \leq P(B)$.

Teorema 1.10
Jika A dan B dua kejadian, maka $P(A \backslash B) = P(A) - P(A \cap B)$.

Ingat: $A \backslash B = A \cap B^c$ atau himpunan anggota-anggota A yang *bukan* anggota B.

Bukti:



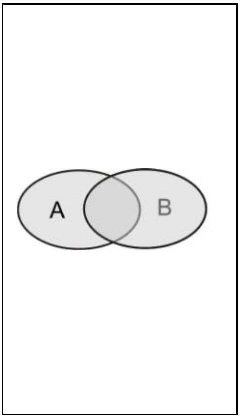
A dapat dinyatakan ke dalam 2 kejadian yang saling asing, yaitu A\B dan $A \cap B$ atau
$A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$.

Dengan aksioma 3 didapatkan:
P(A) = P(A(B) + P($A \cap B$) atau
P(A(B) = P(A) – P($A \cap B$).

Teorema 1.11

Jika A dan B *sebarang dua kejadian*, maka
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Bukti:



$A \cup B$ dapat dinyatakan dengan 2 kejadian yang saling asing yaitu A\B dan B atau
$A \cup B = (A/B) \cup B$.
Dengan **aksioma 1.3** dan **teorema 1.4**, didapatkan:

$$P(A \cup B) = P(A \setminus B) + P(B)$$
$$= P(A) - P\ (A \cap B) + P(B);$$

Karena
$$P(A \setminus B) = P(A) - P(A \cap B).$$

Terbukti
$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P\ (A \cap B).$$

Contoh 1.20

Satu dadu dilemparkan satu kali dan dilihat banyak mata dadu yang muncul

A = kejadian muncul *mata prima*; A = {2, 3, 5}; P(A) = $\frac{3}{6}$

B = kejadian muncul *mata ganjil*; A = {1, 3, 5}; P(B) = $\frac{3}{6}$

$A \cap B$ = kejadian muncul mata prima *dan* ganjil = {3, 5}

$P(A \cap B) = \frac{2}{6}$.

$A \cup B$ = kejadian muncul mata prima *atau* ganjil = {1, 2, 3, 5}

$P(A \cup B) = \frac{4}{6}$.

atau dengan **Teorema 1.5**:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{6} + \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}.$$

Teorema akibat

Untuk sebarang tiga kejadian, A, B dan C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Definisi 1 dari peluang hanya dapat digunakan untuk percobaan dengan *hasil yang banyak elemennya berhingga dan dengan kemungkinannya sama*. Misalnya dalam melambungkan sebuah dadu, maka peluang untuk munculnya mata genap $= P(\{2, 4, 6\}) = \frac{3}{6}$, karena keenam sisi dadu berkemungkinan sama untuk tampak/muncul. Dan dalam lambungan yang berulang-ulang, frekuensi relatif dari munculnya mata genap haruslah mendekati $\frac{1}{2}$.

Tetapi untuk dadu yang *tidak seimbang*, yaitu dadu, yang bila dilambungkan, peluang munculnya tiap sisi tidak sama, maka munculnya mata genap dapat berbeda yaitu cukup jauh dari $\frac{1}{2}$.

Untuk membicarakan hal ini, digunakan definisi peluang empiris sebagai berikut:

Definisi 1.4

Misalkan S merupakan ruang sampel, S = $\{a_1, a_2, \ldots , a_n\}$; dan misalkan pula bahwa $p_1, p_2, \ldots , p_n$ adalah bilangan-bilangan tidak negatif yang jumlahnya sama dengan 1, atau $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1$. Untuk kejadian A, peluangnya didefinisikan sebagai P(A) = jumlah semua p_1 yang berkaitan dengan hasil a_1, dengan a_1 di dalam A.

Contoh 1.21

Sebuah dadu yang tidak setimbang dilambungkan berulang-ulang dan didapatkan frekuensi relatif sebagai berikut.

Jumlah mata dadu	1	2	3	4	5	6
Frekuensi relatif	0,13	0,18	0,18	0,16	0,15	0,20

Jika dadu itu dilambungkan satu kali dan diperhatikan banyaknya mata yang muncul, maka ruang sampelnya:

$$S = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

Jika A kejadian bahwa muncul mata genap, maka A = {2, 4, 6}

$$P(A) = P(2) + P(4) + P(6) = 0{,}18 + 0{,}16 + 0{,}20 = 0{,}54$$

Jika B kejadian bahwa muncul mata prima, maka B = {2, 3, 5}

$$P(B) = P(2) + P(3) + P(5) = 0{,}18 + 0{,}18 + 0{,}15 = 0{,}51$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Misalkan suatu ruang sampel S terdiri dari 4 elemen S = $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$
Apakah masing-masing ketentuan berikut ini mendefinisikan suatu peluang pada S?

A. $P(a_1) = \frac{1}{2}$; $P(a_2) = \frac{1}{3}$; $P(a_3) = \frac{1}{4}$; $P(a_4) = \frac{1}{5}$

B. $P(a_1) = \frac{1}{2}$; $P(a_2) = \frac{1}{4}$; $P(a_3) = -\frac{1}{4}$; $P(a_4) = \frac{1}{2}$

C. $P(a_1) = \frac{1}{2}$; $P(a_2) = \frac{1}{4}$; $P(a_3) = \frac{1}{8}$; $P(a_4) = \frac{1}{8}$

D. $P(a_1) = \frac{1}{2}$; $P(a_2) = \frac{1}{4}$; $P(a_3) = \frac{1}{4}$; $P(a_4) = 0$

2) Dua kartu diambil secara random dari satu pak kartu bridge (yang diisi 52 kartu). Hitunglah peluangnya bahwa kartu tersebut adalah kartu hati. Misalkan sebutan untuk nama kartu bridge adalah ….

A. ♥
Hati

B. ♦
segiempat

C. ♣
cengkeh

D. ♠
daun hitam

3) Misalkan A dan B kejadian-kejadian dengan $P(A) = \frac{3}{8}$, $P(B) = \frac{1}{2}$ dan $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, hitunglah ….

A. $P(A \cup B)$
B. $P(A^c)$
C. $P(A^c \cap B^c)$
D. $P(B \cap A^c)$

4) Dua buah dadu yang setimbang dilambungkan bersama-sama satu kali. Diperhatikan banyaknya mata dadu yang muncul.
Misalkan:
A = kejadian bahwa jumlah mata dadu yang muncul 8.
B = kejadian bahwa mata dadu pertama muncul mata 4.

A. Tentukan ruang sampel S!
B. Tentukan kejadian A dan B sebagai himpunan bagian dari S!
C. Tentukan peluang dari A dan B!

5) Satu mata uang yang tidak setimbang dilambungkan satu kali sehingga munculnya sisi M dua kali munculnya sisi B.
Hitunglah P(M) dan P(B).

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. Kita lihat $P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{77}{66} > 1$

Hal ini didasarkan dengan aksioma (A_2), yaitu P(S) = 1. Jadi, ketentuan ini tidak mendefinisikan suatu ruang peluang pada S.

b. $P(a_3) = -\frac{1}{4}$, yang merupakan suatu bilangan negatif.

Ini bertentangan dengan **aksioma 1.1**. Jadi, ketentuan ini tidak mendefinisikan suatu ruang peluang pada S.

c. $P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = 1$

Dan tiap $P(a_1) > 0$.
Maka ketentuan ini mendefinisikan suatu ruang peluang pada S.

d. $P(a_1) > 0$ dan $P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + 0 = 1$

Jadi, ketentuan ini mendefinisikan suatu ruang peluang pada S.

2) Ada C (52, 2) $= \frac{52!}{2!(52-2)!} + \frac{52!}{2!50!} = 1326$ cara untuk mengambil 2 kartu dari 52 kartu. Banyaknya kartu hati 13.

Ada C (13, 2) = $\frac{13!}{2!11!} = 78$ cara untuk mengambil 2 kartu dari 13 kartu.

Jadi, peluang bahwa 2 kartu yang terambil adalah kartu hati $= \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$.

3) a. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$

b. $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$

c. *Ingat* hukum de Morgan: $(A^c \cap B^c) = (A \cup B)^c$

$P(A^c \cap B^c) = P(A \cup B)^c = 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{5}{8} = \frac{3}{8}$

d. $P\left(B \cap A^c\right) = P\left(B\right) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

4) Dua dadu dilambungkan satu kali

		Dadu II					
		1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
	1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
Dadu I	**3**	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
	4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
	5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
	6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a. Ruang sampel S = {(1, 1), (1, 2), …, (5, 6), (6, 6)}
b. A = {(6, 2), (5, 3), (4, 4), (3, 5), (2, 6)}
   B = {(4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6)}
c. $P(A) = \frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)} = \frac{5}{36}$

   $P\left(B\right) = \frac{n\left(A\right)}{n\left(S\right)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

5) Misalkan P(B) = p

P(M) = 2 x P(B) = 2p

Karena hanya ada 2 sisi, yaitu M dan B, maka:

P(B) + P(M) = p + 2p = 1

Dari persamaan: p + 2p = 1 didapatkan $p = \frac{1}{3}$

Jadi, $P(B) = \frac{1}{3}$; $P(M) = 2p = \frac{2}{3}$.

RANGKUMAN

Dari uraian mengenai peluang, maka dapat dirangkum sebagai berikut.

1. Ruang sampel S : himpunan dari semua hasil yang mungkin dari suatu percobaan.
   Kejadian : merupakan himpunan bagian dari ruang sampel S.
   Jika $a \in S$ maka {a} disebut kejadian yang sederhana.
2. $A \cup B$: kejadian yang terjadi A terjadi *atau* B terjadi.
   $A \cap B$: kejadian yang terjadi A terjadi *dan* B terjadi.
   A^c : kejadian yang terjadi jika A tidak terjadi.
3. Definisi peluang (yang pertama) = $P(A) = \dfrac{n(A)}{n(S)}$.
4. A dan B **saling asing** jika A $\cup$ B = $\varnothing$ **.**
5. Aksioma-aksioma
   (*Aksioma 1.1*). Untuk setiap kejadian A, 0 ≤ P(A) ≤ 1.
   (*Aksioma 1.2*). P(S) = 1.
   (*Aksioma 1.3*). Jika A dan B dua kejadian yang saling asing maka $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
   (*Aksioma 1.4*). Jika A_1, A_2, … merupakan deretan kejadian yang saling asing, maka
   $P(A_1 \cup A_2 \cup ...) = P(A_1) + P(A_2) + ...$
6. Teorema-teorema:
   a. P($\varnothing$) = 0.
   b. $P(A^c) = 1 - P(A)$.
   c. Jika $A \subset B$ maka P(A) ≤ P(B).
   d. Jika A dan B sebarang kejadian maka
      $P(A\,|\,B) = P(A) - P(A \cap B)$.
   e. Jika A dan B sebarang kejadian, maka
      $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$
7. Definisi peluang (yang kedua).
   Jika S = {a_1, a_2, …, a_n} dan
   a. Pi ≥ 0, dengan i = 1, 2, 3, …,n.
   b. P1 + P2 + … + Pn = 1,
      maka jika A suatu kejadian dalam S.
   P(A) = jumlah semua p yang berkaitan dengan $a_1 \in A$.

TES FORMATIF 2

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1) Jika $S = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$

   $P(a_3) = P(a_4) = \frac{1}{4}$ dan $P(a_1) = 2\,P(a_2)$, maka $P(a_1) =$ ….

   A. $\frac{1}{6}$

   B. $\frac{5}{6}$

   C. $\frac{1}{3}$

   D. $\frac{2}{3}$

2) Sebuah mata uang yang setimbang dengan dua sisi, yaitu (M, B) dan sebuah dadu yang setimbang dengan 6 mata dadu, yaitu $(1, 2, 3, 4, 5, 6)$ dilambungkan satu kali. Ruang sampel S terdiri atas 12 elemen, yaitu:
   S = {M1 , M2 , M3 , M4 , M5 , M6 , B1 , B2 , B3 , B4 , B5 , B6}.
   Jika A kejadian bahwa muncul sisi M pada mata uang dan bilangan genap pada dadu, B kejadian bahwa muncul bilangan prima pada dadu, maka kejadian bahwa A atau B terjadi adalah ….

   A. {M2, M3, M4, M5, M6, B2, B3, B5}

   B. {M2, M3, M5, B2, B3, B5}

   C. {M2, M3, M4, M5, M6}

   D. {M2, M3, B2, B3}

3) Suatu kelas terdiri atas 10 siswa laki-laki dan 20 siswa wanita di mana 5 siswa laki-lakinya dan 10 siswa wanitanya berambut keriting. Maka peluang bahwa seorang siswa yang dipilih secara random adalah siswa laki-laki atau berambut keriting adalah ….

   A. $\frac{3}{4}$

   B. $\frac{2}{3}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{1}{2}$

4) Misalkan A dan B kejadian-kejadian dengan $P\left(A \cup B\right) = \frac{3}{4}$.

$P(A^c) = \frac{2}{3}$ dan $P\left(A \cap B\right) = \frac{1}{4}$. Maka P(B) = ….

A. $\frac{3}{4}$

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{1}{3}$

D. $\frac{2}{3}$

5) Tiga siswa A, B dan C bertanding renang. A dan B berpeluang sama untuk menang dan peluangnya adalah 2 kali peluang C untuk menang. Maka peluang bahwa B menang dalam pertandingan renang tersebut adalah …

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{3}$

C. $\frac{2}{5}$

D. $\frac{2}{3}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Peluang Bersyarat

A. PELUANG BERSYARAT

Suatu kejadian dapat bergantung pada terjadi atau tidaknya suatu kejadian lain. Untuk kejadian yang bergantung pada kejadian lain, nilai peluangnya dicari dengan menggunakan peluang bersyarat, sebagai berikut:

Definisi 1.5

Misalkan E sebarang kejadian dalam ruang sampel S, dengan $P(E) > 0$.

Peluang bersyarat dari kejadian A dengan syarat E terjadi, ditulis $P\left(\frac{A}{E}\right)$, didefinisikan sebagai berikut:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

atau, misalkan S ruang sampel yang berhingga dengan kejadian A dan E. Maka:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{\text{Banyaknya elemen dalam } A \cap E}{\text{Banyaknya elemen dalam } E}$$

Contoh 1.22

Misalkan sepasang dadu yang setimbang dilambungkan satu kali. Dilihat jumlah mata dadu yang muncul. E kejadian bahwa jumlah mata yang muncul pada kedua dadu sama dengan 6. A kejadian muncul mata 2 pada paling sedikit satu dadu.

Maka:

S = {(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), …, (5,6), (6,6): n(S) = 36.

E = {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}; n(E) = 5; P(E) = $\frac{5}{36}$.

A = {(2,1), (2,2), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (1,2), (3,2), (4,2), (5,2), (6,2)}; n(A) = 11.

A | E = {(2,4), (4,2)}; P(A | E) = $\frac{2}{36}$.

Jadi, *peluang bersyarat* dari A dengan syarat E adalah:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{\frac{2}{36}}{\frac{5}{36}} = \frac{2}{5}$$

atau:

Banyaknya elemen dalam A | E = n(A | E) = 2

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{n(A \cap E)}{n(E)} = \frac{2}{5}$$

Jadi peluang terjadinya muncul mata 2 pada paling sedikit satu dadu jika diketahui bahwa jumlah mata yang muncul pada kedua dadu sama dengan 6 adalah $\frac{2}{5}$.

Contoh 1.23

Andaikan S ruang sampel dari sekelompok orang dewasa yang telah menyelesaikan studinya. Orang tersebut dikelompokkan menurut jenis kelamin dan status kerja sebagai berikut.

	Bekerja	**Tidak bekerja**	**Jumlah**
Laki-laki	460	40	500
Perempuan	140	260	400
Jumlah	600	300	900

Seorang di antara orang tersebut dipilih secara acak untuk mewakili kelompok tersebut. Bila telah diketahui orang yang dipilih sudah bekerja, berapakah peluang orang tersebut laki-laki?

Penyelesaian:

Misalkan B: Kejadian terpilih seorang yang sudah bekerja.

L: Kejadian terpilih seorang laki-laki.

Yang ditanyakan peluang L dengan syarat B atau $P\left(\frac{L}{B}\right)$

$$P(L) = \frac{500}{900};\quad P(B) = \frac{600}{900};\quad P(L \cap B) = \frac{460}{900};$$

$$P\left(\frac{L}{B}\right) = \frac{P(L \cap B)}{P(B)} = \frac{460}{600} = \frac{23}{30}$$

Perlu diperhatikan bahwa rumus:

$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$

dapat dinyatakan dengan P (A | E) = P (E) . $P\left(\frac{A}{E}\right)$.

Teorema 1.12

Jika A, B dan C tiga kejadian di ruang sampel S dengan P(A) $\neq$ 0, P(A | B) $\neq$ 0, maka $P(A \cap B \cap C) = P(A)\ .\ P\left(\frac{B}{A}\right)\ .\ P\,\frac{C}{A \cap B}$.

Contoh 1.24

Sebuah kotak berisi 40 butir telur dan diketahui 5 butir di antaranya rusak. Jika 3 butir telur diambil berturut-turut secara acak tanpa pengembalian, berapakah peluang ketiga butir telur itu rusak?

Misal A peristiwa pengambilan I rusak maka $P(A) = \frac{5}{40} = \frac{1}{8}$.

Misal B peristiwa pengambilan II rusak maka $P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{4}{39}$.

Misal C peristiwa pengambilan III rusak maka $P\left(\frac{C}{A \cap B}\right) = \frac{3}{38}$.

Peluang ketiga telur itu rusak adalah:

$$P(A)\,.\,P\left(\frac{B}{A}\right).\,P\frac{C}{A\cap B} = \frac{5}{40}\,.\,\frac{4}{39}\,.\,\frac{3}{38}$$
$$= \frac{1}{988}.$$

Kejadian-kejadian yang Bebas

Suatu kejadian B dikatakan independen (bebas) dari kejadian A jika peluang terjadinya B tidak terpengaruh oleh terjadi atau tidaknya kejadian A, atau jika peluang dari B sama dengan peluang bersyarat dari B dengan syarat A, yaitu: $P(B) = P\left(\frac{B}{A}\right)$.

Dari rumus peluang bersyarat:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(B\cap A)}{P(A)} \text{ dan } P\left(\frac{B}{A}\right) = P(B).$$

Maka:

$$P(B\cap A) = P(B)\,.\,P(A).$$

Definisi 1.6

Kejadian-kejadian A dan B dikatakan bebas/independen, jika $P(A\cap B) = P(A)\,.\,P(B)$. Jika $P(A\cap B) \neq P(A)\,.\,P(B)$ maka A dan B dikatakan dependen (saling bergantung).

Contoh 1.25

Misalkan suatu mata uang yang setimbang dilambungkan 3 kali.
Maka: S = {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}.
Perhatikan kejadian-kejadian berikut.
A = kejadian bahwa pada lambungan I muncul sisi M.
B = kejadian bahwa pada lambungan II muncul sisi M.
C = kejadian bahwa tepat muncul 2 sisi M berturut-turut.

Maka:

A = {MMM, MMB, MBM, MBB}; $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

B = {MMM, MMB, BMM, BMB}; $P(B) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

C = {MMB, BMM} ; $P(C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

a. $A \cap B = \{MMM, MMB\}$; $P(A \cap B) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(A) \,.\, P(B) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$

Karena $P(A \cap B) = P(A) \,.\, P(B)$, maka A dan B merupakan dua kejadian yang independen/ bebas.

b. $A \cap C = \{MMB\}$; $P(A \cap C) = \frac{1}{8}$

$P(A) \,.\, P(C) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} = P(A \cap C)$

Karena P(A $\cap$ C) = P(A) . P(C), berarti bahwa A dan C merupakan dua kejadian yang bebas.

c. $B \cap C = \{MMB, BMM\}$; $P(B \cap C) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

$P(B) \,.\, P(C) = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \neq P(B \cap C)$

Karena $P(B \cap C) \neq P(B) \,.\, P(C)$ berarti bahwa B dan C merupakan dua kejadian yang dependen atau saling bergantung.

Kejadian bebas dapat juga mencakup dua kejadian atau lebih dan untuk mengetahui bebas tidaknya kejadian-kejadian tersebut maka digunakan teorema berikut ini.

Teorema 1.13

Kejadian A_1, A_2, …, A_n adalah kejadian-kejadian bebas jika peluang interaksi dari tiap 2, 3, …, …, n kejadian itu sama dengan hasil perkalian peluang tiap kejadian yang bersangkutan.

Untuk 3 kejadian, misalnya A, B dan C dikatakan kejadian bebas jika dan hanya jika:

i) $$\left.\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \,.\, P(B) \\ P(A \cap C) &= P(A) \,.\, P(C) \\ P(B \cap C) &= P(B) \,.\, P(C) \end{aligned}\right\} \text{yang berarti sepasang-sepasang bebas}$$

ii) $P(A \cap B \cap C) = P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$

Contoh 1.26

Misalkan dua mata uang yang setimbang dilambungkan dua kali

$$S = \{MM, MB, BM, BB\} .$$

Perhatikan kejadian-kejadian:

A = kejadian bahwa sisi M muncul pada mata uang I.
B = kejadian bahwa sisi M muncul pada mata uang II.
C = kejadian bahwa sisi M muncul hanya pada satu mata uang.

Maka:

$$A = \{MM, MB\};\ P(A) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$B = \{MM, BM\};\ P(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$C = \{MB, BM\};\ P(C) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$A \cap B = \{MM\};\ P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = P(A) \,.\, P(B).$$

Jadi, A dan B bebas

$$A \cap C = \{MB\};\ P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = P(A) \,.\, P(C).$$

Jadi, A dan C bebas

$$B \cap C = \{BM\};\ P(A \cap C) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{2} = P(B) \,.\, P(C).$$

Jadi, B dan C bebas

$$A \cap B \cap C = \phi; \;\; P(A \cap B \cap C) = 0 \neq P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$$

Karena $P(A \cap B \cap C) \neq P(A) \,.\, P(B) \,.\, P(C)$ maka kejadian A, B dan C tidak bebas, meskipun sepasang-sepasang kejadian tersebut bebas.

B. PROSES STOKASTIK BERHINGGA DAN TEOREMA BAYES

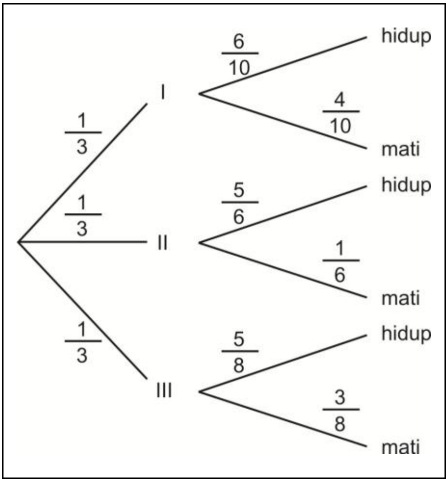
Suatu deretan berhingga dari eksperimen-eksperimen di mana tiap eksperimen mempunyai sejumlah berhingga hasil yang mungkin dengan peluang yang tertentu disebut *Proses Stokastik yang berhingga*. Suatu cara yang baik sekali untuk menjelaskan (menggambarkan) suatu proses dan perhitungan peluang dari sebarang kejadian adalah dengan suatu *diagram pohon* seperti berikut.

Contoh 1.27
Kita mempunyai 3 kotak sebagai berikut.
Kotak I berisi 10 bola lampu, 4 di antaranya mati.
Kotak II Berisi 6 bola lampu, 1 di antaranya mati.
Kotak III berisi 8 bola lampu, 3 di antaranya mati.

Kita memilih satu kotak secara random dan kemudian dari kotak tersebut mengambil sebuah bola lampu secara random. Berapakah peluang bahwa bola lampu tersebut mati?
Di sini kita mempunyai suatu urutan dari 2 eksperimen, yaitu:
1) memilih satu dari 3 kotak,
2) mengambil satu bola lampu yang mungkin mati (M) atau mungkin hidup (H).

Diagram pohon berikut menggambarkan proses tersebut dan menunjukkan peluangnya yang terdapat pada setiap cabang pohon.
Peluang mengambil satu kotak dari 3 kotak secara random adalah $\frac{1}{3}$. Jadi peluang yang terambil kotak I = peluang yang terambil kotak II = peluang yang terambil kotak III. Dari kotak I yang berisi 10 bola lampu, 4 di

antaranya mati. Peluang bahwa bola lampu yang terambil itu mati = $\frac{4}{10}$ dan peluang bahwa bola lampu yang terambil itu hidup $= 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}$..



Dari kotak II, yang berisi 6 bola lampu, I di antaranya mati: Peluang bahwa bola lampu yang terambil mati = $\frac{1}{6}$ dan peluang bola lampu yang terambil hidup $= 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

Dari kotak III, yang berisi 8 bola lampu, 3 di antaranya mati, peluang bahwa bola lampu yang terambil mati = $\frac{3}{8}$ dan peluang bahwa bola yang terambil hidup $= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}$.

Peluang bahwa bola lampu yang terambil dari kotak I adalah mati

$$= \left(\frac{1}{3}\right) \cdot \left(\frac{4}{10}\right) = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}.$$

Peluang bahwa bola lampu yang terambil dari kotak II adalah mati

$$=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{1}{18}.$$

Peluang bahwa bola lampu yang terambil dari kotak III adalah mati

$$=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{3}{8}\right)=\frac{3}{24}.$$

Jadi, peluang bahwa bola lampu yang terambil mati = peluang bola lampu yang terambil mati dari kotak I + peluang bola lampu yang terambil mati dari kotak II + peluang bola lampu yang terambil mati dari kotak III.

$$=\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{2}{5}\right)+\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}\right).\left(\frac{3}{8}\right)$$

$$=\frac{2}{15}+\frac{1}{18}+\frac{3}{24}$$

$$=\frac{113}{360}.$$

C. TEOREMA BAYES

Timbulnya suatu kejadian sering tergantung pada keadaan yang dapat mempengaruhi timbulnya kejadian tersebut. Peristiwa terjadinya suatu kebakaran, misalnya dapat dipengaruhi oleh keadaan cuaca. Sedang hasil percobaan menembak dapat dipengaruhi oleh kecepatan angin pada saat percobaan itu dilakukan.

Perhatikan contoh berikut ini.

Contoh 1.28
Dua buah kotak, masing-masing berisi 50 batang kapur. Dalam kotak pertama di antara 50 batang kapur terdapat 10 batang yang rusak sedang dalam kotak kedua di antara 50 batang terdapat 20 batang yang rusak. Jika seseorang mengambil sebuah kapur dan kebetulan rusak, berapakah peluang kapur itu terambil dari kotak kedua?

Kita misalkan
H_1: kejadian kapur itu terambil dari kotak I.
H_2: kejadian kapur yang terambil dari kotak II.
A : kejadian kapur yang terambil rusak.

Peluang yang ditanyakan adalah suatu peluang bersyarat, yaitu $\left(\frac{H_2}{A}\right)$.

Kejadian A dipengaruhi oleh kejadian H_1 dan H_2.

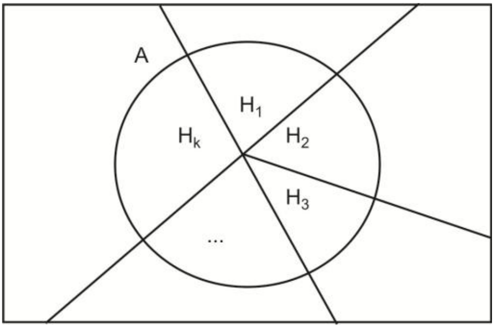
$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) \\ &= P(H_1) \,.\, P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P(H_2) \,.\, P\left(\frac{A}{H_2}\right) \\ &= \frac{1}{2} \,.\, \frac{1}{5} + \frac{1}{2} \,.\, \frac{2}{5} \\ &= \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P\left(\frac{H_2}{A}\right) &= \frac{P(A \cap H_2)}{P(A)} = \frac{P(H_2) \,.\, P\left(\frac{A}{H_2}\right)}{P(A)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} . \frac{2}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

Keadaan yang mempengaruhi munculnya suatu kejadian dapat lebih dari satu atau dua faktor. Andaikan ada k faktor atau keadaan yang dapat mempengaruhi munculnya suatu kejadian. Ruang sampel percobaan kita bagi menjadi k daerah bagian yang saling asing, artinya tidak ada titik sampel persekutuan antar daerah itu, dan kita misalkan faktor atau keadaan yang dapat mempengaruhi percobaan itu tercakup dalam daerah-daerah tadi yang kita sebut dengan H_1, H_2, H_3, …, H_k.

Misalkan pula, A adalah kejadian yang akan kita amati pada percobaan itu. Yang akan kita cari adalah peluang kejadian A yang disebabkan oleh H_1, H_2, …, H_k.

Perhatikan diagram di bawah ini.



Keterangan:

H_1, H_2, …, H_k adalah keadaan-keadaan dalam S yang mempengaruhi terjadinya A.

P (H_i) > 0 untuk setiap i.

A = $\left(H_1 \cap A\right) \cup \left(H_2 \cap A\right) \cup \ldots \cup \left(H_k \cap A\right)$

Oleh karena A dapat muncul bersama-sama dengan salah satu dari kejadian H_i maka A akan muncul jika dan hanya jika salah satu dari kejadian yang saling asing

$\left(H_1 \cap A\right), \left(H_2 \cap A\right), \ldots, \left(H_k \cap A\right)$ muncul,

atau

$$P\left(A\right) = P\left(H_1 \cap A\right) + P\left(H_2 \cap A\right) + \ \ldots \ + P\left(H_k \cap A\right).$$

Karena $P\left(H_1 \cap A\right) = P\left(H_1\right).\, P\left(A / H_1\right)$ maka substitusi pada hubungan di muka menghasilkan

$$P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i \cap A)}{P(A)}$$

$$= \frac{P(H_i)\,.\,P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{P(H_i \cap A)+P(H_i \cap A)+...+P(H_i \cap A)}$$

$$= \frac{P(H_i)\,.\,P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{\Sigma\, P(H_i)\,.\,P\left(\frac{A}{H_i}\right)}$$

Formula ini kita kenal dengan *formula Bayes*.

Contoh 1.29

Tiga kotak masing-masing memiliki dua laci. Di dalam laci-laci tersebut terdapat sebuah medali. Di dalam kotak I terdapat medali emas, dalam kotak kedua medali perak dan laci kotak ketiga masing-masing medali emas dan perak. Diambil sebuah kotak, kemudian lacinya dibuka, ternyata isinya medali emas. Berapa peluangnya bahwa laci lain berisi medali perak ?

Misalkan:
H_1 kejadian terambil kotak I,
H_2 kejadian terambil kotak II,
H_3 kejadian terambil kotak III,
A kejadian laci yang dibuka berisi medali emas.

Kotak yang menjadi jawaban atas pertanyaan adalah kotak III sehingga yang akan kita cari adalah $P(H_3/A)$.

$$P\left(\frac{H_3}{A}\right) = \frac{P\left(H_3\right) . P\left(\frac{A}{H_3}\right)}{P\left(H_1\right) . P\left(\frac{A}{H_1}\right) + P\left(H_2\right) . P\left(\frac{A}{H_2}\right) + P\left(H_3\right) . P\left(\frac{A}{H_3}\right)}$$

$$= \frac{\frac{1}{3} . \frac{1}{2}}{\frac{1}{3} . 1 + \frac{1}{3} . 0 + \frac{1}{3} . \frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{3}.$$

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Sebuah kartu diambil secara acak dari satu pak kartu bridge (yang berisi 52 kartu). Berapa peluang kartu itu adalah King (K) jika diketahui bahwa kartu yang terambil itu adalah kartu yang bergambar orang?
2) Sepasang dadu yang setimbang dilambungkan satu kali dan dilihat jumlah mata yang muncul. Carilah peluangnya bahwa jumlah mata kedua lebih dari atau sama dengan 10, jika muncul mata 5 pada dadu pertama.
3) Misalkan A kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak laki-laki dan perempuan. B kejadian bahwa suatu keluarga mempunyai anak paling banyak satu laki-laki. Tunjukkan bahwa A dan B merupakan kejadian yang lepas/independen, jika suatu keluarga mempunyai anak laki-laki 3 (tiga).
4) Sebuah perusahaan memiliki 3 mesin masing-masing M_1, M_2 dan M_3. Hasil dari masing-masing mesin berturut-turut kita sebut H_1, H_2 dan H_3. Mesin M_1 menghasilkan 60% dari seluruh produksi. Mesin M_2, 25% dan M_3 menghasilkan 15%. Selanjutnya berdasarkan hasil pemeriksaan, diketahui bahwa 5% dari H_1, 2% dari H_2 dan 8% dari H_3 cacat. Jika suatu

hasil produksinya diambil secara acak, berapakah peluang hasil itu cacat?

5) Jika pada soal nomor 4 diketahui produk yang terambil itu cacat, berapakah peluang produksi itu berasal dari M_2?
6) Seorang kontraktor sedang menyelesaikan perbaikan jalan. Pekerjaan itu dapat tertunda jika ada pemogokan para pekerja. Hasil peluang terjadinya pemogokan 0,6 peluang pekerjaan selesai tepat pada waktunya tanpa pemogokan 0,85 dan peluang pekerjaan selesai jika ada pemogokan 0,35. Tentukanlah peluangnya bahwa pekerjaan itu selesai pada waktunya.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Misalkan G kejadian terambil kartu bergambar orang, P(G) = $\frac{12}{52}$.

   Misalkan K kejadian terambil kartu King (K)
   Banyaknya kejadian terambil kartu bergambar orang yang King = $n(K \cap G) = 4$. Sehingga P (kartu yang terambil adalah King jika diketahui bahwa kartu yang terambil itu adalah kartu yang bergambar orang) adalah:

$$P\left(\frac{K}{G}\right) = \frac{P(K \cap G)}{P(G)}$$

$$= \frac{\frac{4}{52}}{\frac{12}{52}}$$

2) Misalkan A kejadian bahwa muncul mata 5 pada dadu I, maka
   $A = \{(5,1),\ (5,2),\ (5,3),\ (5,4),\ (5,5),\ (5,6)\}$
   Misalkan B kejadian bahwa jumlah mata yang muncul ≥ 10,
   maka $B = \{(5,5),\ (5,6),\ (6,5),\ (6,6)\}$

   $B \cap A = \{(5,5),\ (5,6)\}$; $P(B \cap A) = \frac{2}{36}$; $P(A) = \frac{6}{36}$

$$P\left(\frac{B}{A}\right)=\frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{2}{36}}{\frac{6}{36}}=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

3) Ruang sampel S = {LLL, LLP, LPL, PLL, LPP, PLP, PPL, PPP}

A = {LLP, LPL, LPP, PLL, PLP, PPL}; P(A) $=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$

B = {LPP, PLP, PPL, PPP}; P(B) $=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

A $\cap$ B = {LPP, PLP, PPL}; P(A $\cap$ B) $=\frac{3}{8}$

P(A) **.** P(B) $=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$ = P(A $\cap$ B).

Terbukti A dan B bebas.

4) Misalkan A adalah kejadian bahwa produk yang terambil cacat

$$P(A)=P(A\cap H_1)+P(A\cap H_2)+P(A\cap H_3)$$
$$=P(H_1)\cdot P\left(\frac{A}{H_1}\right)+P(H_2)\cdot P\left(\frac{A}{H_2}\right)+P(H_3)\cdot P\left(\frac{A}{H_3}\right)$$
$$=(0,6)\cdot(0,05)+(0,25)\cdot(0,02)+(0,15)\cdot(0,08)=0,047.$$

5) $$P\left(\frac{M_2}{A}\right)=\frac{P(M_2\cap A)}{P(A)}=\frac{0,25\text{ x }0,02}{0,047}=0,106$$

6) Misalkan A adalah kejadian pekerjaan selesai pada waktunya, B kejadian pemogokan dan B' kejadian tidak ada pemogokan

$$P\left(\frac{A}{B'}\right)=0,85.$$

$$P(A)=P(A\cap B)+P(A\cap B')$$
$$=P(B).\,P\left(\frac{A}{B}\right)+P(B').\,P\left(\frac{A}{B'}\right)$$
$$=(0,6).(0,35)+(0,4).(0,85)=0,21+0,34=0,55.$$

RANGKUMAN

1. Jika E sebarang kejadian dalam ruang sampel S, dengan $P(E) > 0$, maka *peluang bersyarat* dari kejadian A dengan syarat E adalah:
$$P\left(\frac{A}{E}\right) = \frac{P(A \cap E)}{P(E)}$$
2. a. Suatu kejadian B dikatakan bebas/independen dari kejadian A jika peluang terjadinya B tidak terpengaruh oleh terjadinya kejadian A
atau jika $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
b. Jika $P(A \cap B) \neq P(A) \cdot P(B)$ maka A dan B dikatakan *dependen/saling bergantung*
c. 3 (tiga) kejadian A, B dan C dikatakan saling bebas jika:
$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$
$$P(A \cap C) = P(A) \cdot P(C)$$
$$P(B \cap C) = P(B) \cdot P(C)$$
$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B) \cdot P(C)$$

4. Suatu deretan berhingga dari eksperimen-eksperimen di mana setiap eksperimen mempunyai sejumlah berhingga hasil yang mungkin dengan peluang yang tertentu disebut *suatu proses stokastik.*
5. Teorema Bayes
Jika A suatu kejadian, dan H_1, H_2, …, H_k adalah kejadian-kejadian yang tidak bebas dengan A, maka
$$P\left(\frac{H_i}{A}\right) = \frac{P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right)}{\Sigma\, P(H_i) \cdot P\left(\frac{A}{H_i}\right)}.$$

TES FORMATIF 3

Pilih satu jawaban yang paling tepat!

1) Tiga mata uang yang setimbang dilambungkan satu kali. Peluang bahwa ketiganya muncul sisi M jika salah satu dari ketiga mata uang tersebut muncul sisi M adalah ….
   A. $\frac{1}{7}$
   B. $\frac{1}{5}$
   C. $\frac{1}{8}$
   D. $\frac{1}{6}$

2) Peluang bahwa 10 tahun lagi seorang laki-laki masih hidup adalah $\frac{1}{4}$ dan peluang bahwa 10 tahun lagi istrinya masih hidup adalah $\frac{1}{3}$, maka peluang bahwa keduanya masih hidup dalam 10 tahun lagi adalah ….
   A. $\frac{1}{8}$
   B. $\frac{1}{9}$
   C. $\frac{1}{6}$
   D. $\frac{1}{12}$

3) Dua dadu dilambungkan bersama-sama 1 kali.
   K adalah kejadian bahwa jumlah mata dadu lebih dari 10.
   L adalah kejadian bahwa mata dadu 1 muncul mata prima. M adalah kejadian bahwa kedua dadu muncul mata sama. Maka kejadian ….

A. K dan L bebas
B. K dan M saling asing
C. L dan M tidak bebas
D. K dan L tidak bebas

4) Dalam sebuah keranjang ada 20 butir telur rebus, 12 butir di antaranya adalah telur itik, sedang sisanya adalah telur ayam. Dari ke-20 butir telur rebus itu, 4 butir telur itik dan 3 butir telur ayam dibuat asin. Sebutir telur diambil secara random dari keranjang tersebut. Peluang mendapatkan telur ayam yang tidak asin adalah ….
A. $\frac{2}{20}$
B. $\frac{3}{20}$
C. $\frac{4}{20}$
D. $\frac{5}{20}$

5) Dalam suatu kelas Matematika, 60% siswanya adalah perempuan. Pada waktu ada pengukuran berat, didapatkan bahwa 10% dari siswa laki-laki dan 5% siswa perempuan beratnya lebih dari 60 kg. Seorang siswa dipilih secara random dan ternyata beratnya lebih dari 60 kg. Peluang bahwa siswa yang terpilih itu adalah siswa perempuan adalah ….
A. $\frac{4}{8}$
B. $\frac{3}{7}$
C. $\frac{3}{9}$
D. $\frac{4}{7}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) $K \times L = \{1,3,5\} \times \{4,6,8\} =$
   $\{(1,4),(1,6),(1,8),(3,4),(3,6),(3,8),(5,4),(5,6),(5,8)\}$.
   Jawab: C.
2) Yang merupakan partisi dari X adalah $\left[\{p, q, r, s, t\}, \{u\}\right]$,
   karena $\{p, q, r, s, t\} \cup \{u\} = X$.
   Jawab: A.
3) Banyak kunci kombinasi yang mungkin adalah; $6 \times 6 \times 6 = 216$, karena banyak angka dari 0 sampai 5 ada 6 angka.
   Jawab: D.
4) Karena ada 6 orang yang antri, maka banyak cara ke enam orang tersebut antri adalah $6! = 720$ cara.
   Jawab: D.
5) Banyak cara menunjuk 2 orang dari 20 orang adalah $C(20, 2) = 190$ cara.
   Jawab: D.

Tes Formatif 2

1) Misal $P(a_2) = p$, maka $P(a_1) = 2p$.
   $P(a_1) + P(a_2) + P(a_3) + P(a_4) = 1$.
   Jadi $2p + p + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 1$; $3p = \frac{1}{2}$; $p = \frac{1}{6}$; $P(a_1) = 2p = \frac{1}{3}$.
   Jawab: C.
2) A = {M2, M4, M6}; B = {M2, M3, M5, B2, B3, B5}.
   $A \cup B$ = {M2, M3, M4, M5, M6, B2, B3, B5}.
   Jawab: A.
3) Satu kelas berisi (10 + 20) siswa = 30 siswa.
   Yang berambut keriting (5 + 10)siswa = 15 siswa
   Misal
   A = kejadian yang terpilih siswa laki-laki $P(A) = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
   B = kejadian yang terpilih siswa yang berambut keriting
   $P(B) = \frac{15}{30} = \frac{1}{2}$.

Siswa laki-laki **dan** berambut keriting ada 5 siswa $P(A \cap B) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$

Peluang yang terpilih adalah laki-laki atau yang berambut keriting

$= P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$

Jawab: B.

4) $P(A) = 1 - P(A^C) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$

$\frac{3}{4} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{4}.$

Jadi, $P(B) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}..$

Jawab: D.

5) Misal P(C) = p, maka P(A) = P(B) = 2p.

P(A) + P(B) + P(C) = 2p + 2p + p = 1. $p = \frac{1}{5}$.

$P(B) = 2p = \frac{2}{5}$.

Jawab: C.

Tes Formatif 3

1) Ruang Sampel S = {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM, BBB}

Misal A kejadian bahwa salah satu mata uang muncul sisi M.

A = {MMM, MMB, MBM, MBB, BMM, BMB, BBM}; $P(A) = \frac{7}{8}$.

Misal B kejadian ketiganya muncul sisi M, maka B = {MMM}

$A \cap B$ = {MMM} dan $P(A \cap B) = \frac{1}{8}$.

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{P(A \cup B)}{P(A)} = \frac{1}{7}.$$

Jawab: A.

2) Misal A kejadian bahwa 10 tahun lagi laki-laki tersebut masih hidup, maka $P(A) = \frac{1}{4}$.

Misal B kejadian bahwa 10 tahun lagi istrinya masih hidup, maka P(B) = $P(A) = \frac{1}{3}$.

Peluang keduanya masih hidup 10 tahun lagi = $P(A \cap B) = \frac{1}{4} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{1}{12}$.

Jawab: D.

3) $K = \{(5,6),(6,5),(6,6)\}$; $P(K) = \frac{3}{36}$

$L = \{(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),$
$(5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6)\}$; $P(L) = \frac{18}{36}$.

Ingat bahwa mata prima pada dadu pertama adalah 2, 3, dan 5.

$M = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$; $P(M) = \frac{6}{36}$.

K dan L tidak bebas, karena $P(K \cap L) \neq P(K).P(L)$.
K dan M tidak saling asing, karena $K \cap M \neq \varnothing$.
L dan M bebas. karena $P(M \cap L) = P(M).P(L)$.
Jawab: D.

4) Misal A = kejadian yang terambil telur ayam; $P(A) = \frac{8}{20}$.

B = kejadian yang terambil telur itik; $P(B) = \frac{12}{20}$.

S = kejadian yang terambil telur asin.
T = kejadian yang terambil telur tidak asin.

$$P\left(\frac{S}{A}\right)\frac{3}{8},\ P\left(\frac{T}{A}\right) = \frac{5}{8},\ P\left(\frac{S}{B}\right) = \frac{4}{12},\ P\left(\frac{T}{B}\right) = \frac{8}{12}$$

$$P(A \cap T) = P(A)\ .\ P\left(\frac{T}{A}\right) = \frac{8}{20}\ .\ \frac{5}{8} = \frac{5}{20}.$$

Jawab: D.

5) Misal P = kejadian yang terpilih siswa perempuan; P(P) = 0,6.
L = kejadian yang terpilih siswa laki-laki; P(L) = 0,4.
B = kejadian yang terpilih siswa yang beratnya lebih dari 60 kg.

$$P\left(\frac{B}{P}\right) = 0{,}05; \quad P\left(\frac{B}{L}\right) = 0{,}10.$$

$$P\left(\frac{P}{B}\right) = \frac{P(P)\ .\ P\left(\frac{B}{P}\right)}{P(P)\ .\ P\left(\frac{B}{P}\right) + P(L)\ .\ P\left(\frac{B}{L}\right)}$$

$$= \frac{(0{,}6{,}0{,}05)}{(0{,}6.0{,}05 + 0{,}4.0{,}10)} = \frac{3}{7}.$$

Jawab: B.

Daftar Pustaka

Hogg Robert V., Craig Allen T. (1978), *Introduction to Mathematical Statistics*. Macmillan Publishing Co., Inc.

Lipschutz Seymour. (1974). *Theory and Problems of Probability*. Schaum's Outline Series, McGraw-Hill Book Company.

Mood Alexander M., Franklin A.G., Duane C. Boes. (1974). *Introduction to the Theory of Statistics*. McGraw-Hill Kogakusha Ltd.

Soeryadi P. A. (1983). *Pendahuluan Teori Kemungkinan dan Statistika*. Bandung: ITB.