MODUL 1

# Model Matematika Suatu Program Linear

Dr. Marthen Tapilouw, M.Si.

## PENDAHULUAN

Bahasan tentang model matematika dari program linear didasarkan pada pemahaman bahwa umumnya masalah yang kita hadapi dapat diterjemahkan dengan bantuan simbol matematis untuk menunjang proses analisis. Mengenai masalah program linear, setelah diterjemahkan terdapat: (1) variabel aktivitas yang merupakan luaran (*output*), umumnya dinyatakan $x_1, x_2, ..., x_n$ (2) fungsi linear $z = f(x_1, x_2, ....)$ sebagai fungsi tujuan yang dioptimalkan (dimaksimumkan atau diminimumkan) berdasarkan masukan (*input*) yang diketahui, terbatas dan didistribusikan proporsional sesuai dengan banyaknya variabel aktivitas, dan (3) tanda pengetat (*sign restriction*) yang dihubungkan dengan tiap variabel adalah nonnegatif atau $x_i \geq 0$.

Agar diperoleh pemahaman awal mengenai fungsi tujuan yang linear, pembatas (kendala) suatu masalah program linear, perhatikan beberapa definisi berikut ini.

**Definisi 1.1**

Suatu fungsi $f(x_1,x_2,...,x_n)$ dengan variabel $x_1,x_2,...,x_n$ adalah fungsi linear jika dan hanya jika terdapat himpunan konstanta $c_1,c_2,...,c_n$ sehingga $f(x_1,x_2,...,x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n$

**Definisi 1.2**

Untuk suatu fungsi $f(x_1,x_2,...,x_n)$ dan input b, kendala berbentuk pertidaksamaan $f(x_1,x_2,...,x_n) \leq b$ dan $f(x_1,x_2,...,x_n) \geq b$ adalah pertidaksamaan linear.

Berdasarkan definisi, bentuk umum suatu masalah program linear dirumuskan sebagai:

Fungsi tujuan: Maksimumkan (Minimumkan) $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$
Pembatas (kendala) dalam bentuk baku $\mathbf{Ax = b}$
Pengetat $\mathbf{x \geq 0}$

A adalah matriks koefisien dengan orde $m \times n$ ; c dan x adalah vektor kolom dengan n unsur ; b adalah vektor kolom dengan m unsur; unsur-unsur pada b adalah masukan yang diketahui dan umumnya nonnegatif yang didistribusikan secara proporsional. Diharapkan dengan dijelaskan bentuk umum masalah program linear pada Modul 1 dan berbekal pemahaman tersebut, kegiatan belajar mandiri untuk memahami materi bahasan pada modul-modul selanjutnya dapat berlangsung dengan lebih cepat dan berhasil.

Sebagai suatu model optimasi, pertanyaan pokok mengenai suatu program linear adalah: Bagaimanakah ditentukan ada tidaknya penyelesaian dan banyaknya penyelesaian dasar layak dari Ax = b? Apakah ada penyelesaian dasar layak sistem pertidaksamaan linear dalam bentuk baku Ax = b dengan variabel x nonnegatif yang mengoptimalkan (memaksimumkan atau meminimumkan) fungsi tujuan $z = \mathbf{c}^T \mathbf{x}$**?** Pada modul ini dibahas bagaimana penyelesaian dasar (*basic solution*) dan penyelesaian dasar layak Ax = b pertidaksamaan linear sebagai pembatas suatu program linear, melalui penerapan konsep rank matriks, invers matriks, dan operasi baris elementer. Demikian pula supaya dapat ditingkatkan pemahaman konsep, penyelesaian masalah, penalaran dan komunikasi, penyajian contoh, pertanyaan latihan dan tes formatif pada akhir setiap kegiatan belajar. Sementara itu, mengenai cara yang digunakan untuk mendapatkan nilai optimal fungsi tujuan suatu program linear, secara rinci dibahas melalui penerapan metode grafik pada kasus program linear dengan dua variabel pokok, sementara penerapan metode simpleks disajikan pada modul-modul berikutnya.

Tujuan yang diharapkan dapat dicapai setelah mempelajari modul ini adalah Anda dapat menentukan penyelesaian dasar dan penyelesaian dasar layak dari sistem pertidaksamaan linear. Jabaran tujuan tersebut adalah: dapat (1) menentukan rank matriks dan invers matriks koefisien dari bentuk baku sistem pertidaksamaan linear (sistem persamaan), (2) menentukan ada tidaknya penyelesaian sistem persamaan linear (persamaan simultan), penyelesaian dasar (*basic*) sistem pertidaksamaan linear, dan (3) dapat menentukan daerah layak hasil dan penyelesaian dasar-layak hasil sistem pertidaksamaan linear.

Supaya Anda mencapai tujuan mempelajari bahan ajar ini, usahakan membaca dan mencari makna dari uraian materi dan contoh. Kemudian kerjakan soal latihan dan soal tes. Sebaiknya Anda tidak membaca penjelasan untuk mendapatkan jawaban atas soal latihan dan soal tes. Gunakan petunjuk jawaban itu sebagai bahan bandingan sebagai acuan bagi Anda mengetahui tingkat serapan atas materi bahan ajar ini.

Perhatikan saran ini. Orang yang secara kontinu belajar, pasti mencapai hasil optimal.

Selamat belajar, semoga Anda sukses!

KEGIATAN BELAJAR 1

# Matriks dan Sistem Persamaan Linear

Hampir semua masalah program linear, setelah diterjemahkan melalui penggunaan model matematis terdapat pertidaksamaan linear sebagai kendala (pembatas) yang disajikan dalam bentuk baku sebagai sistem persamaan linear, m persamaan dan n variabel dengan m < n. Selanjutnya, digunakan pernyataan sistem persamaan atau persamaan simultan untuk menyatakan sistem persamaan linear. Bentuk umum sistem persamaan yang terdiri atas m persamaan dan n variabel tersebut dirumuskan sebagai:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + \ldots + a_{1n}\,x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + \ldots + a_{2n}\,x_n &= b_2 \\ \ldots \qquad\qquad & \text{---} \quad \text{--} \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + \ldots + a_{mn}\,x_n &= b_m \end{aligned} \tag{1.1}$$

Sistem persamaan (1.1) dapat dinyatakan menggunakan bentuk matriks, sebagai:

$$\mathbf{A.x} = \mathbf{b} \tag{1.2}$$

A = matriks koefisien dengan orde m × n
b = matriks dengan orde m × 1 (vektor kolom berdimensi m)
x = matriks dengan orde n × 1 (vektor kolom berdimensi n)

Jika persamaan simultan (1.2) dinyatakan sebagai pembatas (kendala) suatu program linear maka umumnya variabel x dinyatakan dengan pengetat **x ≥ 0** (dibaca x nonnegatif).

Untuk menentukan penyelesaian dasar layak (*basic feasible solution*) persamaan simultan **Ax = b, x ≥ 0** diperlukan penerapan konsep rank matriks dan invers matriks yang juga merupakan konsep yang dipelajari pada mata kuliah lainnya. Dalam kaitan keterpakaian konsep matriks pada penyelesaian masalah program linear maka konsep matriks dibahas pada modul I. Konsep matriks yang diaplikasikan tersebut, antara lain rank matriks, determinan matriks persegi, dan invers matriks persegi. Sebagai informasi, urutan sajian materi adalah rank matriks, invers matriks, dan penerapan konsep matriks tersebut dalam penyelesaian dasar sistem persamaan **A.x** = b atau bentuk baku dari sistem pertidaksamaan linear.

## A. RANK MATRIKS

Diberikan $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$.

Jika diperhatikan matriks A, terdapat m vektor baris dan n vektor kolom yang dibentuk dari baris-baris dan kolom-kolom dari A. Vektor-vektor baris dari A dinyatakan sebagai:

$r_1 = (a_{11}, a_{12}, ..., a_{1n})$
$r_2 = (a_{21}, a_{22}, ..., a_{2n})$
...
$r_m = (a_{m1}, a_{m2}, ..., a_{mn})$

Vektor-vektor kolom dari A dapat dinyatakan sebagai:

$c_1 = [a_{11}, a_{21}, ..., a_{m1}]$
$c_2 = [a_{12}, a_{22}, ..., a_{m2}]$
...
$c_n = [a_{1n}, a_{2n}, ..., a_{mn}]$

Jika diperhatikan ruang vektor matriks A maka dapat dicatat bahwa terdapat subruang dari $R^n$ yang direntang oleh vektor-vektor baris yang dinamakan ruang baris dari A. Demikian pula terdapat subruang dari $R^m$ yang direntang oleh vektor-vektor kolom dinamakan ruang kolom dari A. Pertanyaannya, berapakah dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks A? Bagaimanakah menentukan dimensi ruang baris dan ruang kolom matriks? Kedua pertanyaan ini berkaitan dengan rank matriks. Definisi berikut ini digunakan sebagai dasar pengertian yang mengarahkan kita untuk menentukan rank matriks dan supaya lebih jelas perhatikan beberapa contoh yang ditampilkan berkaitan dengan rank matriks.

**Definisi 1.1**

Dimensi ruang baris dan ruang kolom suatu matriks dinamakan rank dari A.

**Contoh 1.1**

Carilah dimensi dari $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix}$

*Penyelesaian:*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 4 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dari pengerjaan mereduksi matriks A ke bentuk eselon baris diperoleh dua baris tak nol sehingga dimensi ruang baris dari A adalah dua. Apakah dimensi ruang baris dari $A^T$ adalah dua? Perhatikan pengerjaan berikut.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Dengan mereduksi $A^T$ ke bentuk eselon baris, terdapat dua vektor kolom

$\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$ dan $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ bebas linear sehingga dimensi ruang kolom dari A adalah 2.

Dapat disimpulkan bahwa dimensi ruang baris dari A sama dengan dimensi ruang kolom dari A yaitu 2. Berdasarkan definisi 1.1, rank (A) = 2.

**Teorema 1.1**

Rank kolom dan rank baris suatu matriks A dalam lapangan F adalah sama.

Bukti teorema tidak disajikan karena dianggap telah disajikan pada mata kuliah Aljabar Linear. Dipersilakan Anda membuktikan sebagai latihan.

**Definisi 1.2**

Rank (atau peringkat) suatu matriks $A_{n \times n}$ ditunjukkan oleh banyaknya baris dari paling sedikit satu matriks bujur sangkar minor matriks A yang determinannya tidak sama dengan nol. Jika banyaknya baris matriks dengan determinan tidak nol itu adalah k maka rank(A) = r(A) = k; k $\leq$ n.

1. Jika r(A) = k di mana k = n maka rank (A) disebut rank penuh dan A matriks yang nonsingular (atau *regular*).
2. Jika r(A) = k di mana k < n maka matriks A disebut matriks yang *singular* (atau tidak *regular*).

**Definisi 1.3**

*Rank* matriks A orde m × n di mana m < n adalah m jika terdapat $B_{mxm}$ suatu minor dari A dengan determinan tidak nol. Jika determinan B bernilai nol maka rank (A) = m – 1 yang ditunjukkan minimal satu matriks $C_{(m-1)x(m-1)}$ minor dari A dengan determinan tidak nol.

Berdasarkan informasi dari definisi 1.3, dapat disimpulkan bahwa jika diberikan matriks $A_{mxn}$ dengan m < n maka rank (A) ditentukan dengan menunjukkan cukup satu matriks persegi minor dari A yang determinannya tidak nol. Rank($A_{mxn}$) = m atau rank penuh (*full rank*) jika terdapat satu matriks persegi di antara $B_{mxm}$ minor A determinannya tidak nol. Jika tidak terdapat matriks persegi $B_{m \text{ x } m}$ yang determinannya tidak nol maka rank A ditentukan dari matriks $B_{(m-1)x(m-1)}$ minor dari $A_{mxn}$ dengan meneliti nilai determinannya. Jika tidak terdapat determinan $B_{(m-1)x(m-1)}$ tidak nol maka untuk menentukan rank A harus diperiksa determinan matriks persegi, minor dari A dengan orde kurang dari m – 1. Nilai terkecil dari Rank A adalah satu. Matriks $I_n$ (matriks identitas) adalah suatu contoh matriks dengan rank penuh karena n kolom matriks identitas bebas linear sehingga det ($I_n$) $\neq$ 0, dengan demikian rank ($I_n$) = n.

Selanjutnya, disajikan beberapa contoh dalam hubungan dengan penerapan definisi di atas.

**Contoh 1.2**

Rank kolom dari $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ adalah dua, kecuali untuk x = -6 rank matriks A adalah satu. Mengapa? Alasannya karena untuk x = -6 kedua vektor kolom yang membentuk matriks A tidak bebas linear. Determinan matriks $A_{2\times2}$ tersebut adalah nol untuk x = -6 sehingga rank kolom A atau r(A) = 2 dipenuhi untuk $x \neq -6$.

Perhatikan contoh bagaimana ditentukan rank $A_{mxn}$, m > 2 dan n > 2 melalui penerapan operasi elementer.

**Contoh 1.3**

Diberikan A = $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Tentukan rank (A).

Pada contoh ini digunakan operasi baris elementer dan digunakan juga simbol " ~ " untuk menunjukkan bahwa matriks yang diperoleh setelah suatu operasi mempunyai rank sama dengan rank (A).

| | operasi |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}$ | pertukaran baris |
| $\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ | -2 x baris pertama + baris kedua |

Rank (A) = rank $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 3 \end{bmatrix}$ = 2. Rank (A) = 2 karena ada $B_{2x2}$ minor dari $A_{2x3}$ yang determinannya tidak nol.

**Contoh 1.4**

A = $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ ; Rank (A) = ... .

*Penyelesaian:*

| | operasi |
|---|---|
| $\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ | $-3r_2 + r_1$ |

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad r_3 + r_2$$

Rank (A) = 3, alasannya: karena matriks yang diperoleh setelah operasi $r_3 + r_2$ nilai determinannya adalah -1.

Diskusikan dengan teman-teman Anda masalah berikut.

1. Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, tentukan rank (A) ... .
2. Gunakan transformasi elementer untuk menentukan rank dari matriks berikut.

   a. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ b. $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \\ 1 & -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$
3. Diberikan rank A < 3. Tentukan nilai h

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h-2 & 2 \\ 0 & h-1 & h+2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

## B. INVERS MATRIKS

Langkah-langkah untuk menentukan invers $A_{nxn}$ yang disajikan pada pasal ini adalah (1) menentukan invers matriks melalui ekspansi kofaktor, dan (2) menentukan invers melalui penerapan tranformasi elementer.

### 1. Ekspansi Kofaktor

Ekspansi kofaktor ini tampaknya telah dipelajari pada perkuliahan Aljabar Matriks. Oleh karena itu, pada pasal ini hanya disajikan langkah-

langkah pokok yang umumnya digunakan untuk menunjukkan invers matriks $A_{nxn}$. Langkah-langkah tersebut adalah sebagai berikut.

a. Tentukan matriks minor dari tiap elemen $a_{ij}$

b. Tentukan determinan matriks minor dari $a_{ij}$ atau $M_{ij} = |a_{ij}|$

c. Tentukan elemen dari kof (A), yaitu $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ dan tentukan matriks kof (A):

$$\text{kof (A)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n} \\ K_{21} & K_{22} & \cdots & K_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix}$$

d. Tentukan adj(A) yaitu transpos dari kof(A); (v) tentukan det (A). Cara yang digunakan, antara lain:
det (A) = $a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + a_{13}K_{13}$ atau
det (A) = $a_{11}K_{11} + a_{21}K_{21} + a_{31}K_{31}$ atau
det (A) = $a_{11}K_{11} + a_{22}K_{22} + a_{33}K_{33}$.

e. Tentukan invers A dengan rumus $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\text{Adj(A)}$

**Contoh 1.5**

Tentukan A′ dari matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ -1 & 8 & 2 \end{bmatrix}$$

*Penyelesaian:*

a. Menentukan matriks minor dari elemen $a_{ij}$.
Misalnya, melalui ekspansi elemen minor dari kolom 1:

Matriks minor dari $a_{11}$ = $\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dari eliminer baris pertama dan kolom pertama matriks A.

Matriks minor dari $a_{21}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dari eliminer baris kedua dan kolom pertama matriks A.

Matriks minor dari $a_{31}$ = $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$ diperoleh dari eliminer baris ketiga kolom pertama matriks A.

Ekspansi elemen minor dari baris 1:

Matriks minor dari $a_{12}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ diperoleh dari eliminer baris pertama dan kolom kedua matriks A.

Matriks minor dari $a_{13}$ = $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{bmatrix}$ diperoleh dari eliminer baris pertama dan kolom ketiga matriks A, dan seterusnya.

b. Menentukan determinan matriks minor. Dengan memperhatikan bagaimana didapatkan matriks minor tiap elemen melalui ekspansi baris dan kolom maka determinan matriks minor adalah:

$M_{11} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 48 = -40$; $M_{21} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 8 & 2 \end{vmatrix} = 6 - 40 = -34$;

$M_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = 18 - 20 = -2$

$M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 6 = 10$; $M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 16 + 4 = 20$

$M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 5 = 7$; $M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} = 8 + 3 = 11$

$M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 6 - 10 = -4$ ; $M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$

c. Menentukan elemen kof(A), yaitu

$K_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = -40$

$K_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -10$

$K_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = 20$

$K_{21} = (-1)^{2+1} (-1)(-34) = 34$

$K_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = 7$

$K_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -11$

$K_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = -2$

$K_{32} = (-1)^{3+2}\, M_{32} = 4$
$K_{33} = (-1)\, M_{33} = -2$
Kemudian menyatakan matriks kofaktor dari A, yaitu:

$$\text{kof(A)} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -40 & -10 & 20 \\ 34 & 7 & -11 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

d. Menentukan Adjoint A atau adj(A) sebagai transpos dari kof (A), yaitu:

$$\text{adj(A)} = \begin{bmatrix} -40 & 34 & -2 \\ -10 & 7 & 4 \\ 20 & -11 & -2 \end{bmatrix}.$$

Dengan memperhatikan invers A atau $A^{-1} = \dfrac{\text{adj(A)}}{\det(A)}$ maka perlu ditentukan det (A) = $a_{11}K_{11} + a_{21}K_{21} + a_{31}K_{31}$
= 1(-40) + 2(34) + (-1)(-2)
= – 40 + 68 + 2 = 30 sehingga diperoleh

$$A^{-1} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} -40 & 34 & -2 \\ -10 & 7 & 4 \\ 20 & -11 & -2 \end{bmatrix}$$

e. Langkah selanjutnya, dilakukan verifikasi terhadap $A^{-1}$ melalui penerapan rumus: $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n$. Verifikasi diperlukan supaya diketahui benar tidaknya hasil pengerjaan yang dilakukan dan prosedur yang digunakan telah tepat.
Dalam hubungan dengan penerapan konsep rank dan determinan suatu matriks maka dari contoh 1.5 diperoleh catatan: Det(A) = 30 atau det(A) $\neq$ 0, berarti invers A atau $A^{-1}$dapat ditentukan karena rank (A) = 3 menunjukkan matriks A non-singular. Jika det(A) = 0 maka A tidak mempunyai invers atau A singular.
Apakah dapat ditentukan det(A) melalui ekspansi baris ketiga? Apakah tetap diperoleh det(A) = 30 bila dilakukan ekspansi baris melalui elemen pada kolom kedua? Dipersilakan Anda menjawab kedua pertanyaan ini. Selanjutnya disarankan untuk mengedepankan beberapa matriks persegi dengan orde berbeda, supaya diadakan komparasi dan kajian berkelanjutan.

**Diskusikan dengan teman-teman anda masalah berikut.**

a. Apakah matriks A mempunyai Invers?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

b. Diberikan $A = \begin{bmatrix} x & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & x & \sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{2} & x \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 4-x & 2\sqrt{5} & 0 \\ 2\sqrt{5} & 4-x & \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} & 4-x \end{bmatrix}$

Di bawah kondisi nilai x manakah A dan B masing-masing tidak mempunyai invers? Jelaskan!

**2. Penerapan Konsep Matriks Elementer**

Pada Pasal 1 telah dijelaskan bahwa $A_{n\times n}$ mempunyai invers bila determinan A tidak nol. Oleh karena itu langkah awal sebelum ditentukan invers suatu matriks adalah memeriksa nilai determinan matriks tersebut. Jika nilai determinan A tidak nol maka invers A dapat ditentukan. Jika nilai determinan A adalah nol maka A singular.

**Definisi 1.6**

Sebuah matriks dengan orde $n \times n$ disebut matriks elementer jika matriks tersebut diperoleh dari matriks identitas $I_n$ dengan melakukan operasi baris elementer tunggal. Sebagai ilustrasi ditampilkan tiga matriks:

(i) $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Matriks (i) diperoleh dari baris pertama $I_2$ dikalikan $\frac{1}{3}$; matriks (ii) diperoleh dari baris ke-3 $I_3$ dikalikan (-3) kemudian dijumlahkan dengan baris kedua; dan matriks (iii) diperoleh setelah baris kesatu dan ketiga pada $I_3$ dipertukarkan tempatnya.

Dengan memperhatikan definisi matriks elementer maka untuk menerapkan operasi baris elementer untuk mencari invers matriks, diperlukan beberapa teorema. Bukti teorema tersebut dapat ditemukan pada bahasan Aljabar Linear.

**Teorema 1.2**

Jika matriks elementer E dihasilkan melalui operasi baris pada $I_m$ dan jika A adalah semua matriks dengan orde m × n maka hasil perkalian EA adalah matriks yang dihasilkan bila operasi pada baris yang dilakukan pada A.

Sebagai ilustrasi disajikan contoh berikut ini untuk menjelaskan penerapan Teorema 1.2.

Diberikan $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$ dan matriks $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

yang dihasilkan dari penambahan 2 kali baris ketiga $I_3$ kepada baris pertama. Hasil EA adalah:

$$EA = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 10 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

yang sama seperti matriks yang dihasilkan bila ditambahkan 2 kali baris ketiga dari A ke baris pertama. Dengan memperhatikan definisi matriks elementer, dapat disimpulkan bahwa matriks E mempunyai invers. Demikian pula berbasickan teorema 1.2 diperoleh hubungan:

$$E_k \ldots E_2.E_1.A = I_n \iff A = E_1^{-1}.E_2^{-1} \cdots E_k^{-1}.I_n$$

Hubungan yang ekuivalen

$$A^{-1} = E_k \ \ldots \ E_2.E_1.I_n$$

**Contoh 1.6**

Carilah invers dari:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

*Penyelesaian:*

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad -2r_1 + r_3;\ -3r_1 + r_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad r_2 : 4$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 5 & -10 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad -5r_2 + r_3$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} & \frac{-5}{4} & 1 \end{array}\right] \quad 2r_3 : 5$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-10}{4} & \frac{-3}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{5} \end{array}\right] \quad \tfrac{5}{2} r_3 + r_2 \ ; \ -3r_3 + r_1$$

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-11}{10} & \frac{3}{2} & \frac{-6}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{10} & \frac{-1}{2} & \frac{2}{5} \end{array}\right]$$

Dengan demikian, $A^{-1} = \dfrac{1}{10}\begin{bmatrix} -11 & 15 & -12 \\ 10 & -10 & 10 \\ 7 & -5 & 4 \end{bmatrix}$

## 3. Penerapan Rank dan Invers Matriks

Bagaimana mengidentifikasi banyaknya penyelesaian dari A.x = b dengan $A_{n \times n}$?. Pertama, perhatikan orde matriks A. Jika det(A) $\neq 0$ maka rank A = n. Jika rank (A) = n maka persamaan simultan Ax = b konsisten atau mempunyai penyelesaian. Andaikan $A_x$ diperoleh dari matriks A dimana salah satu kolomnya digantikan dengan elemen-elemen pada vektor b. Dengan demikian, apabila det ($A_x$) tidak sama dengan nol maka sistem persamaan A.x = b konsisten dan mempunyai satu penyelesaian (*penyelesaian yang unik*), diperoleh melalui penerapan aturan Crammer. Kedua, apabila diperoleh rank A = k dengan k < n maka persamaan simultan A.x = b mempunyai banyak penyelesaian. Mengapa? Ingat kembali konsep bebas linear. Konsep bebas linear ini menjadi prasyarat untuk mengidentifikasi penyelesaian basic dari sistem persamaan Ax = b.

**Contoh 1.7**

Perhatikan sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 5 \qquad (*) \\ x_1 - x_2 &= 1 \end{aligned}$$

Dinyatakan dengan menggunakan notasi matriks:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Jika dimisalkan: $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$ dan $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

maka persamaan simultan (*) dapat dinyatakan sebagai **Ax = b**.

Jika diperhatikan persamaan simultan (*) maka didapatkan matriks diperbesar (*augumented matrix*):

$$A_b = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \end{bmatrix} \text{ pertukarkan baris 2 dengan 3}$$

Apabila dihitung determinan dari $A_x$, $A_y$, $A_z$ maka diperoleh det (A ) $\neq 0$; det $(A_x) \neq 0$ ; det $(A_y) \neq 0$ dan det$(A_z) \neq 0$. Ax adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom kesatu dengan elemen-elemen vektor b. Ay adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan mengganti kolom kedua dengan elemen-elemen vektor b. Az adalah matriks yang diperoleh dari matriks A dengan menggantikan kolom ketiga dengan elemen-elemen vektor b. Dengan demikian, dapat disimpulkan rank (A) = 3; rank ($A_B$) = 3. Hal ini menunjukkan bahwa persamaan simultan pada Contoh 1.7 mempunyai tepat satu penyelesaian. Bagaimana menentukan penyelesaian persamaan simultan tersebut? Perhatikan penerapan konsep operasi baris elementer atas matriks diperbesar, penerapan aturan Crammer, dan penerapan konsep invers matriks.

a. Melalui penerapan operasi baris elementer atas matriks yang diperbesar $A_b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, diperoleh x = 2 , y = 1 dan z = 1

b. Dengan aturan Crammer diperoleh:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 5 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{-12}{-6} = 2 \;;\; x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{-6} = \frac{-6}{-6} = 1$$

dan $x_3 = 1$

c. Jika diperhatikan A.x = b maka $A^{-1}$.A.x = $A^{-1}$.b; Karena $A^{-1}$.A = I sehingga diperoleh x = $A^{-1}$.b. Dengan demikian, jika diperoleh invers A yaitu $A^{-1} = \frac{-1}{6}\begin{pmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ maka $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ dapat ditentukan.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} -1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 3 \\ -4 & 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Beberapa catatan berkaitan dengan penyelesaian sistem persamaan **A.x = b,** dengan matriks koefisien $A_{nxn}$

a. Jika r(A) = r($A_B$) = n maka persamaan simultan A.x = b mempunyai penyelesaian tunggal (unik).

b. Jika r(A) = r($A_B$) = k di mana k < n maka persamaan simultan A.x = b mempunyai tak berhingga penyelesaian.

c. Jika $r(A) < r(A_B)$ maka persamaan simultan A.x = b tidak mempunyai penyelesaian.

Pernyataan ke-2, dibahas pada modul mengenai penerapan metode simplex dan penyelesaian masalah program linear dengan kasus khusus seperti kasus kemerosotan (degenerasi).

**Diskusikan masalah berikut.**
Diberikan sistem persamaan:

a. $x_1 + x_2 + 2x_3 = 8$
$-x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1$
$3x_1 - 7x_2 + 4x_3 = 10$
   1) Tentukan rank matriks koefisien!
   2) Tentukan rank matriks diperbesar $A_b$!
   3) Gunakan operasi baris elementer untuk mencari solusi sistem persamaan!
   4) Tentukan invers matriks koefisien!

b. Untuk nilai a yang manakah sistem persamaan
$x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4$
$3x_1 - x_2 + 5x_3 = 2$
$4x_1 + x_2 + (a^2 - 14)x_3 = a + 2$
mempunyai:
   1) Tepat satu penyelesaian.
   2) Tidak mempunyai penyelesaian.
   3) Tak hingga banyaknya penyelesaian.

## C. PENYELESAIAN DASAR (BASIC) SISTEM PERSAMAAN

Perhatikan persamaan simultan

$$\mathbf{A.x = b} \qquad (1.3)$$

dengan $A_{m \times n}$ di mana $m < n$, $x = [x_1, x_2, ..., x_n]$, $b = [b_1, b_2, ..., b_m]$. Sistem persamaan demikian sangat sering diaplikasikan sebagai pembatas (kendala) masalah program linear. Andaikan m kolom dari A bebas linear atau rank (A) = m. Kondisi demikian menunjukkan bahwa persamaan simultan A.x = b mempunyai tak hingga penyelesaian. Dalam kaitan itu, sehubungan dengan rank (A) = m dapat diasumsikan bahwa kita dapat memilih m kolom pertama dari A dan dicatat sebagai matriks $B_{mxm}$. Matriks B nonsingular sehingga dimungkinkan untuk memperoleh penyelesaian tunggal dari persamaan simultan

$$B.x_B = b \tag{1.4}$$

Untuk m elemen pada vektor $x_B$. Dari persamaan (2) dan memperhatikan pengertian rank (A) = m dapat ditentukan penyelesaian A.x = b dengan menyajikan x = ($x_B$, 0) menunjukkan m komponen pertama dari x dinyatakan sebagai $x_B$ dan n – m komponen disamakan dengan nol. Perhatikan definisi berikut.

**Definisi 1.7**

Diberikan m persamaan simultan dengan n variabel (1), dan dimisalkan $B_{m\times m}$ adalah matriks nonsingular yang dibentuk dari kolom matriks A. Jika semua komponen n – m yang tidak diasosiasikan dengan kolom pada B diberikan nilai nol maka penyelesaian persamaan simultan disebut sebagai penyelesaian dasar (*basic solution*) yang diperoleh dari penyelesaian $B.x_B = b$ dengan B sebagai matriks basic. Komponen dari x yang berasosiasi dengan kolom-kolom B disebut variabel dasar (*basic variables*).

Dari definisi tersebut, dapat dinyatakan bahwa penyelesaian dasar berhubungan dengan ekspresi vektor **b** sebagai suatu kombinasi linear dari vektor basic. Tentu saja, persamaan (1.4) kemungkinan tidak mempunyai penyelesaian basic. Oleh karena itu, digunakan asumsi rank penuh, matriks $A_{mxn}$ dengan m < n dan m baris dari A bebas linear. Di bawah asumsi rank penuh, sistem persamaan $\mathbf{B.x_B = b}$ selalu mempunyai penyelesaian dan fakta ini akan diperoleh A.x = b mempunyai paling sedikit satu penyelesaian dasar. Variabel dasar (basic) pada suatu penyelesaian dasar tidak perlu semuanya nol. Perhatikan definisi berikut ini.

**Definisi 1.8**

Jika satu atau lebih variabel dasar (*basic variables*) pada suatu penyelesaian dasar mempunyai nilai nol maka penyelesaian disebut sebagai penyelesaian dasar degenerasi (*degenerate basic solution*).

Dapat dicatat bahwa variabel dasar pada penyelesaian dasar non-degenerasi, dan karena itu pada basic **B** dengan segera dapat diidentifikasi dari komponen positif suatu penyelesaian. Dalam hal ini, terdapat dua makna yang dihubungkan dengan penyelesaian dasar degeneratif karena variabel dasar dan variabel nondasar bernilai nol dapat dipertukarkan.

Sebagai bahan diskusi lebih jauh mengenai penyelesaian dasar, hanya dibahas persamaan simultan

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \text{ dengan } \mathbf{x} \geq \mathbf{0} \qquad (1.5)$$

representasi pembatas (*constraints*) suatu program linear dalam bentuk baku. Perhatikan definisi berikut.

**Definisi 1.9**

Suatu vektor x yang memenuhi $\mathbf{Ax = b, x \geq 0}$ disebut fisibel untuk pembatas ini. Suatu penyelesaian layak (*feasible solution*) pada pembatas $\mathbf{Ax = b, x \geq 0}$ yang merupakan penyelesaian dasar disebut penyelesaian dasar layak (*feasible basic solution*). Jika penyelesaian ini adalah suatu penyelesaian dasar degenerasi maka disebut penyelesaian dasar layak degenerasi.

**Contoh 1.8**

Diberikan sistem persamaan:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + x_3 \quad &= 16 \\ 3x_1 + 7x_2 + \quad x_4 &= 23 \end{aligned} \qquad (*)$$

Tentukan penyelesaian sistem persamaan tersebut.

*Penyelesaian:*

$A_b = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 1 & 0 & 16 \\ 3 & 7 & 0 & 1 & 23 \end{bmatrix}$ dan Rank ($A_b$) = 2. Oleh karena sistem persamaan (*) mempunyai tak hingga penyelesaian maka dengan memperhatikan definisi penyelesaian basic di atas diperoleh banyaknya penyelesaian dasar:

1. $x_1 = 0, x_2 = 0. x_3 = 16 , x_4 = 23$
2. $x_1 = 0, x_3 = 0, x_2 = \frac{16}{5} , x_4 = \frac{3}{5}$
3. $x_1 = 0, x_4 = 0, x_2 = \frac{23}{7} , x_3 = - \frac{3}{7}$
4. $x_2 = 0, x_3 = 0, x_1 = 8, x_4 = -1$
5. $x_2 = 0, x_4 = 0, x_1 = \frac{23}{3} , x_3 = \frac{2}{3}$
6. $x_3 = 0, x_4 = 0, x_1 = 3, x_2 = 2$

$x_1$ dan $x_2$ diperoleh dari penyelesaian persamaan simultan.

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 23 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 7 & -5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 16 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Pada Contoh 1.8, tercatat bahwa ada enam penyelesaian dasar. Dengan demikian, banyaknya penyelesaian dasar dari persamaan simultan **A.x = b** di mana $A_{m\times n}$, m < n, rank penuh dari A adalah m dapat ditentukan dengan bantuan rumus kombinasi berikut ini

$${}_nC_m = \frac{n!}{m!(n-m)!}\ ;\ n!\ \text{ dibaca n faktorial}$$

Selanjutnya, apabila ditanyakan ada berapa penyelesaian dasar layak dari persamaan simultan **Ax = b, x ≥ 0** pada Contoh 1.8? Jawabannya, di antara 6 penyelesaian dasar yang memenuhi syarat, hanya ada empat karena pada dua penyelesaian: $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_2 = \frac{23}{7}$, $x_3 = -\frac{3}{7}$ dan $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 8$, $x_4 = -1$, tidak semua variabel bernilai non negatif. Dengan demikian dari Contoh 1.8 dapat dinyatakan bahwa terdapat empat penyelesaian dasar layak dan dua penyelesaian tidak dasar layak.

Hal yang dapat terjadi di antara beberapa penyelesaian dasar (*basic*) dengan memperhatikan definisi di atas adalah terdapat satu atau lebih variabel basic bernilai nol. Kalau terdapat kondisi demikian maka penyelesaian dasar itu disebut penyelesaian dasar dengan kemerosotan (*degenerasi*). Demikian pula variabel basic yang bernilai nol itu disebut *variabel degenerasi* dan tidak melebihi banyaknya penyelesaian dasar.

**Contoh 1.9**

Carilah semua penyelesaian dasar sistem persamaan:

$4x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 7x_4 = 10$

$3x_1 + 2x_2 + 6x_3 + 9x_4 = 11$

*Penyelesaian:*

1. Misalkan $x_1 = x_2 = 0$, $x_3$ dan $x_4$ dapat dicari dari:

   $8x_3 + 7x_4 = 10$

   $6x_3 + 9x_4 = 11$

   karena $r(A) = r(A_B) = 2$ maka terdapat penyelesaian dasar:

   $x_3 = \frac{13}{30}$ ; $x_4 = \frac{14}{15}$ ; $x_1 = 0$ ; $x_2 = 0$.

   Dengan cara yang sama diperoleh penyelesaian dasar lainnya, yaitu:

2. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, \frac{13}{31}, 0, \frac{35}{31}\right)$
3. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(0, -2, \frac{5}{2}, 0\right)$
4. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{13}{15}, 0, 0, \frac{14}{15}\right)$
5. $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5, -2, 0, 0)$

6. Tidak ada penyelesaian ke-enam tidak ada karena terdapat matriks koefisien sistem persamaan:

$$4x_1 + 8x_3 = 10$$
$$3x_1 + 6x_3 = 11$$

yaitu vektor [4, 3] dan [8, 6] tak bebas linear.

Bagaimana dengan banyaknya penyelesaian sistem persamaan dengan n < m, di mana n adalah banyaknya variabel dan m adalah banyaknya persamaan. Perhatikan contoh berikut.

**Contoh 1.10**
Carilah penyelesaian:

$$2x_1 + 4x_2 = 2$$
$$-x_1 + 2x_2 = 7$$
$$x_1 + 6x_2 = 9$$

Pada Contoh 1.10, banyaknya variabel dua dan banyaknya persamaan tiga. Penyelesaian sistem persamaan dapat dicari melalui:

1. Mencari penyelesaian sistem persamaan dengan dua variabel dan dua persamaan (persamaan ke satu dengan kedua atau kombinasi lainnya).
2. Substitusi nilai $x_1$ dan $x_2$ yang diperoleh ke persamaan ketiga.
3. Apabila $x_1$ dan $x_2$ sebagai penyelesaian sistem persamaan pada langkah ke-1 memenuhi persamaan ketiga maka $x_1$ dan $x_2$ sebagai penyelesaian sistem persamaan.
4. Akan tetapi, bila $x_1$ dan $x_2$ tidak memenuhi persamaan ketiga maka sistem persamaan awal tidak mempunyai penyelesaian (inkonsisten).

5. Perhatikan prosedur untuk menentukan penyelesaian sistem persamaan di atas.

$2x_1 + 4x_2 = 2$
$-x_1 + 2x_2 = 7$
karena r(A) = 2 maka sistem persamaan konsisten dan penyelesaiannya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = 2$ substitusikan ke $x_1 + 6x_2 = 9$ ternyata memenuhi

$x_1 + 6x_2 = 9$
$-x_1 + 2x_2 = 7$
karena det(A) = 8 ≠ 0 maka sistem persamaan konsisten dan penyelesaiannya adalah $x_1 = -3$ dan $x_2 = 2$ substitusikan ke $2x_1 + 4x_2 = 2$ ternyata memenuhi

Jadi, penyelesaian sistem persamaan tersebut adalah $x_1 = -3$; $x_2 = 2$

**Contoh 1.11**

Perhatikan:

$$\begin{aligned} x_1 + 6x_2 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 &= -1 \\ -x_1 + 2x_2 &= 8 \end{aligned}$$

Sistem persamaan:

$x_1 + 6x_2 = 4$
$2x_1 + 4x_2 = -1$ konsisten dengan penyelesaian

$$x_1 = -\frac{11}{4} \text{ dan } x_2 = \frac{9}{8}$$

Substitusi ke $-x_1 + 2x_2 = 8$ menjadi $\frac{22}{8} + \frac{18}{8} = 5 \neq 8$

Sistem persamaan $\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 4 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix}$ tidak konsisten karena $x_1$ dan $x_2$ sebagai penyelesaian tidak memenuhi persamaan $-x_1 + 2x_2 = 8$. Demikian pula jika $x_1$ dan $x_2$ sebagai penyelesaian dari sistem; $2x_1 + 4x_2 = -1$ dan $-x_1 + 2x_2 = 8$, kemudian substitusi ke $x_1 + 6x_2 = 4$ ternyata tidak memenuhi sehingga dapat disimpulkan sistem persamaan mula-mula tetap tidak konsisten.

Sebelum mengerjakan soal-soal latihan tunjukkan bahwa sistem persamaan:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 &= 3 \\ 5x_1 - 7x_2 &= 0 \end{aligned}$$

tidak konsisten.

## LATIHAN

Untuk meningkatkan pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui sistem persamaan

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 &= 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 &= 7 \end{aligned}$$

   a) Nyatakanlah sistem persamaan dalam bentuk **A.x = b**.
   b) Tentukan minor $a_{22}$ matriks A.
   c) Apakah nilai kofaktor $K_{31}$ positif atau negatif? Jelaskan
   d) Carilah det (A) = $a_{31}K_{31} + a_{32}K_{32} + a_{33}K_{33}$
   e) Matriks kofaktor K matriks A adalah....
   f) Adj(A) = ….
   g) Tentukan $A^{-1}$
   h) Carilah penyelesaian dari **A.x = b** melalui penerapan $A^{-'}$ dan periksa jawaban yang diperoleh menggunakan aturan Crammer.

2) Diketahui sistem persamaan **A.x = b** dengan persamaan pembentuknya

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 4 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \end{aligned}$$

   a) Berapakah r(A)?
   b) Carilah $A^{-1}$ dengan bantuan operasi baris elementer!
   c) Carilah $A^{-1}$ dengan prosedur perkalian invers
   d) Cara mencari $A^{-1}$ manakah yang menurut Anda lebih efisien? Jelaskan!

3) Perhatikan sistem persamaan:

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 \\ 2x_2 - x_3 + x_5 &= 2 \end{aligned}$$

$2x_3 + x_4 = 3$

a) Tulislah matriks yang diperbesar $A_B$ persamaan A.x = b!

b) Carilah r(A)!

c) Carilah $r(A_B)$!

d) Carilah semua penyelesaian dasar (basic) A.x = b!

4) Tinjau sistem persamaan A.x = b yaitu

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + 2x_3 &= p \\
x_1 \quad + x_3 &= q \\
2x_1 + x_2 + 3x_3 &= r
\end{aligned}
$$

a) Gunakan operasi baris elementer untuk menunjukkan hubungan p, q, dan r agar A.X = b konsisten.

b) Hitung $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{22}K_{33} + a_{33}K_{33}$

c) Apakah matriks A non-singular? Kalau ternyata matriks A non-singular carilah $A^{-1}$!

*Petunjuk Jawaban Latihan*

1) a) Sistem persamaan A . x = b

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

b) Minor dari $a_{22}$ adalah matriks $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$; elemen pada baris kedua dan kolom kedua matriks A dihilangkan.

c) Untuk mengetahui tanda $K_{ij} = (-1)^{i+j}$ Anda harus memperhatikan aturan $K_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

d) Dengan bantuan aturan ini Anda dapat menemukan $\det(A) = 2 \times K_{31} -1 \times K_{32} -3 \times K_{33}$; Tentukan dahulu $K_{31}$, $K_{32}$ dan $K_{33}$.

e) Matriks kofaktor dari A adalah $\begin{bmatrix} -1 & 7 & -3 \\ 10 & -1 & 7 \\ 8 & \dots & \dots \end{bmatrix}$ lengkapilah (harus dicari dahulu $K_{11}$, $K_{12}$, $K_{13}$, $K_{21}$, $K_{22}$, $K_{23}$, $K_{31}$, $K_{32}$ dan $K_{33}$)

f) $\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -1 & 10 & 8 \\ 7 & -1 & \dots \\ -3 & 7 & \dots \end{bmatrix}$

g) $A^{-1}$ diperoleh melalui penerapan rumus $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$

2) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

det(A) = 1 + 2 + 3 + 1 – 2 + 3 = 8 $\neq$ 0 maka
r(A) = 3.
Mencari $A^{-1}$ dengan bantuan operasi baris elementer sebagai berikut.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kalikan baris 1 dengan (-3) tambahkan ke baris 2; dan kalikan baris 1 dengan (-1) tambahkan ke baris 3.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

kalikan baris 2 dengan $\left(-\dfrac{1}{4}\right)$. Kalikan baris 3 dengan $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Kalikan baris 3 dengan (-1) tambahkan ke baris 1. Kalikan baris 3 dengan $\left(-\frac{1}{4}\right)$ tambahkan ke baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Kalikan baris 2 dengan (-1) tambahkan ke baris 1.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{8} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{array}\right]$$

Pengerjaan berakhir jika matriks sebelah kiri berubah menjadi matriks identitas.

Jadi, $A^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 5 & -2 & 1 \\ 4 & 0 & -4 \end{bmatrix}$

Lihat penjelasan untuk menjawab soal nomor 1c kemudian Anda buat matriks transpos matriks kofaktor dan akhirnya $A^{-1} = \dfrac{\text{adj}(A)}{\det(A)}$; matriks $A^{-1}$ yang diperoleh melalui operasi baris elementer akan sama dengan ekspansi kofaktor.

3) Matriks yang diperbesar $A_B$ dengan orde $3 \times 6$

$$A_B = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right] \quad r(A) = r(A_B) = 3$$

Banyaknya penyelesaian dasar, $_5C_2$ = $\dfrac{5!}{3!\times 2!} = 10$ . Namun, tidak semua dari 10 sistem persamaan itu konsisten. Untuk $x_1 = 0$; $x_3 = 0$; sistem persamaan 3 variabel ($x_2$, $x_4$, dan $x_5$) tidak konsisten karena vektor kolom $x_2$ sebanding dengan vektor kolom $x_5$.Hal yang sama untuk variabel non-basic $x_1$ dan $x_4$. Demikian pula untuk kombinasi variabel non-basic $x_3$ dan $x_4$.

4) Ingat syarat sistem persamaan dengan n variabel dan n persamaan konsisten bila $r(A) = r(A_B) = k$

dalam hal ini n = 3 dan k < 3 . A = $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$

det(A) = 0 + 2 + 2 - 0 - 1 - 3 = 0 sehingga tidak ada $A^{-1}$.

Karena det (A) = 0 maka r(A) < 3; ternyata r(A) = 2

Anda perlu mencari hubungan p,q, dan r dari $\det(A_B) = 0$

dengan menuliskan dahulu

$$A_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & p \\ 1 & 0 & 1 & q \\ 2 & 1 & 3 & r \end{bmatrix}$$

Setelah Anda mengerjakan semua soal di atas, baca dan berusaha meningkatkan pemahaman anda tentang rank matriks, ekspansi kofaktor untuk mencari determinan dan invers matriks, dan menemukan invers matriks melalui perkalian invers dan penyelesaian dasar sistem persamaan, sebagai modal untuk menjawab soal tes formatif.

## RANGKUMAN

1. Rank matriks A berkaitan dengan nilai determinan matriks persegi minor dari A.
   Untuk $A_{m \times n}$ berlaku dua kesimpulan berikut,
   a. Untuk m = n, rank(A) = n jika det(A) ≠ 0. Jika det(A) = 0 maka r(A) ditentukan oleh banyak baris (kolom) minor A entri $a_{ij}$, dengan ada satu matriks dengan determinannya tidak nol.
   b. Untuk m < n; r(A) = m jika terdapat $B_{mxm}$ dengan determinan tidak nol.

2. Rank (A) dengan $A_{mxn}$ dapat ditentukan melalui penerapan operasi baris elementer.
3. Rank (A) = m dari $A_{mxn}$ dan m < n disebut rank penuh (*full rank*)
4. Nilai determinan suatu matriks dapat ditentukan melalui ekspansi kofaktor.
   Misalkan $A_{n \times n}$
   $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{12}K_{12} + \ldots + a_{1n}K_{1n}$
   (ekspansi menurut baris tertentu)
   $\det(A) = a_{21}K_{21} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{2n}K_{1n}$
   $= a_{n1}K_{n1} + a_{n2}K_{n2} + \ldots + a_{nn}K_{nn}$
   $\det(A) = a_{11}K_{11} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{nn}K_{nn}$ (ekspansi diagonal)
   $\det(A) = a_{12}K_{12} + a_{22}K_{22} + \ldots + a_{n2}K_{n2}$ (ekspansi kolom tertentu)

   $K_{ij} = (-1)^{1+j} \times M_{ij}$ ; $M_{ij}$ adalah determinan minor entri $a_{ij}$
5. Matriks $A_{nxn}$ mempunyai invers jika rank (A) = n. Invers A atau $A^{-1}$ ditentukan melalui prosedur: (i) menentukan det (A); (ii) jika det (A) tidak sama dengan nol maka dapat ditentukan matriks kofaktor dari A atau kof (A) dengan unsur $K_{ij} = (-1)^{1+j} \times M_{ij}$ ; (iii) menentukan Adj (A) = transpos dari kof (A); (iv) $A^{-1}$ ditentukan melalui $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{Adj}(A)$. Selain itu invers dari suatu matriks dapat ditentukan melalui penerapan operasi baris elementer (metode Gauss-Yordan), penerapan konsep matriks elementer dan perkalian inversi.
6. Penyelesaian dasar sistem persamaan A.x = b di mana banyak persamaan m dan banyak variabel n serta m < n diperoleh dengan memperhatikan r(A) dan r($A_B$); $A_B$ adalah matriks yang diperbesar sistem persamaan **A.x = b**
   Banyaknya penyelesaian dasar maksimum dari sistem persamaan Ax = b dengan $A_{mxn}$ dengan m < n adalah ${}_nC_m$ (kombinasi n unsur di mana tiap pilihan sebanyak m unsur). m adalah banyaknya variabel dasar (basic) dan n – m variabel disebut variabel non-basic. Semua variabel non-basic diberikan nilai nol.

## TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) $A_B$ adalah matriks yang diperbesar dari **A.x = b.**
Jika diberikan persamaan simultan
$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 10$
$2x_1 + 5x_2 + 8x_3 + 11x_4 + x_6 = 20$
maka rank $(A_B) = 2$. Alasan manakah yang paling tepat?
A. Ada $(A1)_{2\times2}$ minor A yang tak bebas linear
B. Ada $(A1)_{2\times2}$ minor $A_B$ yang determinannya nol
C. Ada $(A1)_{2\times2}$ minor $A_B$ yang determinannya tidak nol
D. Ada $(A1)_{2x2}$ minor A yang bebas linear

2) $A_b$ adalah matriks diperbesar dari **A.x = b.**
Jika diberikan persamaan simultan
$3x_1 + 6x_2 + 2x_3 + x_4 = 12$
$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_5 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_6 = 17$
maka rank $(A_b)$ adalah ....
A. 1
B. 2
C. 3
D. 6

3) Perhatikan sistem persamaan
$3x1 + 6x2 + 2x3 + x4 = 12$
$x1 + 2x2 + 2x3 + x4 = 8$
$xj \geq 0$
Banyaknya penyelesaian dasar layak sistem persamaan adalah ….
A. 2
B. 4
C. 6
D. 8

4) Jika $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ adalah penyelesaian dasar dari
$x_1 + 2x_2 + 2(a - 1)x_3 + x_4 = 8$
$4x_1 + 2x_2 + (a+2)x_3 + x_5 = 6a + 2$
maka (0,1,3,0,0) adalah suatu penyelesaian dasar.
Berapakah nilai a?

A. 0
B. 2
C. 4
D. 6

5) Det(A) dari $A = \begin{bmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 8 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ adalah ....

A. $6.\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}$

B. $6\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$

C. $6\begin{vmatrix} -8 & -3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}$

D. $6\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

6) Perhatikan matriks:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 & 4 \\ -1 & 0 & 1 & 11 \\ 1 & -3 & 0 & 3 \\ 6 & 3 & 14 & 2 \end{bmatrix}$$

Kofaktor unsur $a_{43}$ adalah ….
A. –144
B. –120
C. 132
D. 148

7) Matriks kofaktor dari:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ adalah kof(A) = ...

A. a. $\begin{bmatrix} 9 & 5 & 6 \\ 6 & 6 & 6 \\ -9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

B. b. $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 6 \\ -6 & 6 & -6 \\ -9 & 7 & 6 \end{bmatrix}$

C. c. $\begin{bmatrix} 9 & -6 & -9 \\ -5 & 6 & 7 \\ 6 & -6 & -6 \end{bmatrix}$

D. d. $\begin{bmatrix} 9 & -5 & 6 \\ -6 & 6 & -6 \\ -9 & 7 & -6 \end{bmatrix}$

8) Diberikan matriks $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ dan $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Andaikan matriks elementer $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e_{21} & 1 & 0 \\ e_{31} & 0 & 1 \end{bmatrix}$ digunakan untuk menentukan invers dari $A_1$. Perkalian $E_2.E_1.I_3$ digunakan untuk mendapatkan $A_2$ invers. Matriks $E_2$ = ....

A. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

9) Perhatikan matriks $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -4 & 3 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}$, $A^{-1}$ adalah ….

A. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ -11 & 6 & -9 \\ -12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

B. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & 6 & 9 \\ -12 & 7 & 10 \end{bmatrix}$

C. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & -6 & 9 \\ -12 & -7 & -10 \end{bmatrix}$

D. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & -3 \\ -11 & -6 & 9 \\ -12 & 7 & -10 \end{bmatrix}$

10) Teliti 3 sistem persamaan berikut.

(i) $\begin{aligned} x + 2y &= 5 \\ 3x - 2y &= 7 \\ 4x + 5y &= 17 \end{aligned}$ (ii) $\begin{aligned} 5x - 2y &= 8 \\ 3x + 4y &= 10 \\ 6x + 8y &= 20 \end{aligned}$ (iii) $\begin{aligned} 2x + 3y &= -2 \\ x - y &= 4 \\ 5x + y &= 8 \end{aligned}$

Sistem persamaan yang konsisten adalah ....
A. (i) dan (ii)
B. (ii) dan (iii)
C. (i) dan (iii)
D. (i), (ii) dan (iii)

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

## KEGIATAN BELAJAR 2

# Penyelesaian Dasar Layak Sistem Pertidaksamaan Linear

Perhatikan dua ilustrasi berikut sebagai pengantar untuk mengenali pertidaksamaan linear.

1. Pengusaha perabot rumah (*meubel*) ingin memproduksi lemari kualitas tinggi dan lemari kualitas sedang dari kayu jati dan kayu ramin yang tersedia dalam jumlah tertentu. Tiap unit kayu jati maupun kayu ramin digunakan secara menyebar dalam proporsi tertentu untuk menghasilkan kedua jenis lemari.

   Ilustrasi tersebut menjelaskan: (i) terdapat dua variabel aktivitas dan (ii) terdapat dua jenis kayu sebagai masukan (*input*) terbatas yaitu *paling banyak*. Dalam hal ini kayu jati dan ramin yang tersedia tersebut terpakai untuk membuat perabot rumah.
2. Menurut Dokter, Amin dan Ani (suami istri) perlu mengatur menu makanannya. Untuk itu mereka membutuhkan daging miskin lemak dan daging berlemak dalam jumlah/proporsi tertentu. Kebutuhan Amin dan Ani *sedikitnya* sejumlah daging miskin lemak dalam seminggu. Kedua kriteria daging dapat dipenuhi oleh daging sapi dan ayam atau salah satu.

Dengan memperhatikan definisi 1 dan definisi 2 mengenai fungsi linear dan pertidaksamaan linear sebagai pembatas program linear maka kedua ilustrasi ini menjelaskan model matematis, sistem pertidaksamaan linear yang memuat: (i) variabel bebas daging sapi dan ayam, (ii) proporsi lemak menurut kriteria kebutuhan Amin dan Ani yang terdapat dalam daging sapi dan ayam **paling sedikit** (tanda pertidaksamaan $\geq$) dan **dibutuhkan** yang menunjukkan nilai variabel **nonnegatif** **($\geq 0$)**.

Kedua ilustrasi di atas menampilkan kepada kita bahwa ada dua macam pertidaksamaan linear.

1. $a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2 \leq b_i$ ; $a_{i1}$, $a_{i2}$, dan $b_i$ adalah konstanta (ilustrasi 1)
2. $p_{i1}\,x_1 + p_{i2}\,x_2 \geq t_i$ ; $p_{i1}$, $p_{i2}$, dan $t_i$ adalah konstanta (ilustrasi 2)

Dengan memperhatikan ilustrasi (1), jika terdapat kayu jati dan ramin untuk membuat almari kualitas tinggi ($x_1$) dan almari kualitas sedang ($x_2$) maka *pembatas* sebagai masukan dapat dirumuskan:

$a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \leq b_1$ untuk kayu jati

$a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \leq b_2$ untuk kayu ramin

Demikian pula dari ilustrasi (2) dapat dinyatakan:

kebutuhan Amin $a_{11}\, x_1 + a_{12}\, x_2 \geq b_1$

kebutuhan Ani $a_{21}\, x_1 + a_{22}\, x_2 \geq b_2$

Karena terdapat dua pertidaksamaan linear yang terjalin dalam suatu kesatuan (keterikatan) maka gabungan dua pertidaksamaan itu dapat dinyatakan sebagai sistem pertidaksamaan yang umumnya diaplikasikan sebagai kendala (pembatas) suatu program linear. Dalam praktik kombinasi pembatas suatu program linear dinyatakan seperti berikut ini:

$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq, =, \geq b_1$

$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \leq, =, \geq b_2$

$a_{31}\, x_1 + a_{32}\, x_2 + a_{33}\, x_3 \leq, =, \geq b_3$ dan lainnya bergantung pada rumusan pembatas (kendala) yang ada dalam suatu masalah program linear.

## A. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DUA VARIABEL POKOK

Perhatikan persamaan $a_{11}x + a_{12}y = b_1$ (1.6)

Penyelesaian persamaan (1.1) adalah himpunan pasangan berurut (x, y) yang secara geometri ditunjukkan dengan garis lurus. Bagaimana dengan penyelesaian pertidaksamaan $ax + by \leq c$ (1.7)

dan $ax + by \geq c$ (1.8)

a, b, dan c adalah konstanta.

Untuk itu, Gambar 1.1 memperlihatkan:

(i) gambar garis $ax + by = c$ (bentuk sketsa)

Gambar setengah bidang datar (dengan garis $ax + by = c$ sebagai pembatas) yang menunjukkan himpunan pasangan berurutan (x, y) sebagai penyelesaian pertidaksamaan linear (1.4) dan (1.8)

Andaikan a, b, dan c adalah konstanta real positif.

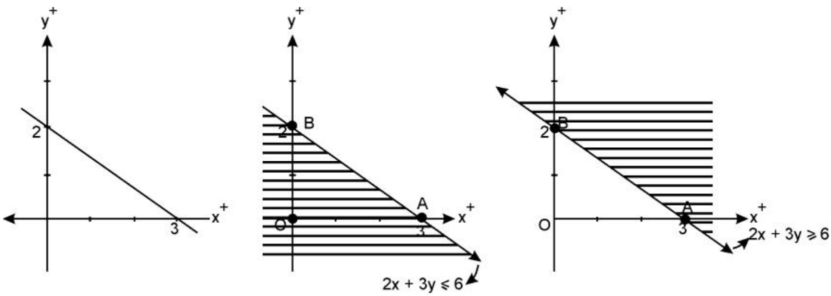
(ii) setengah bidang datar sebelah *kiri* ax + by = c (termasuk garis itu) sebagai *daerah penyelesaian* ax + by $\leq$ c
(ii) setengah bidang datar sebelah *kanan* ax + by = c (termasuk ax + by = c) sebagai *daerah penyelesaian* ax + by $\geq$ c

Sebagai ilustrasi perhatikan contoh dan gambar berikut untuk memperjelas pernyataan tiga pernyataan tersebut di atas.

**Contoh 1.12**

Perhatikan
$2x + 3y = 6$ (1)
$2x + 3y \leq 6$ (2)
dan $2x + 3y \geq 6$ (3)

Dengan demikian, secara geometris, penyelesaian (1), (2), dan (3) ditunjukkan pada gambar berikut.




(i) (ii) (iii)

Gambar 1.1

Pada gambar (i) ditunjukkan garis lurus sebagai penyelesaian (1); Daerah arsiran yang ditunjukkan gambar (ii) memperlihatkan daerah layak hasil pertidaksamaan (2) dan daerah arsiran gambar (iii) memperlihatkan daerah layak hasil pertidaksamaan (3).

Bagaimanakah kalau x dan y nonnegatif? Usahakan mencari makna dari penjelasan berikut ini.

1. Daerah hasil persamaan (1) ialah sepanjang garis termasuk titik potong dengan sb.x dan sb.y.
2. Daerah hasil/penyelesaian pertidaksamaan (2) adalah daerah bidang segitiga OAB.
3. Daerah penyelesaian pertidaksamaan (3) ialah bagian kuadran I ($x^+$, $y^+$)di luar segitiga OAB dengan segmen AB sebagai pembatas.

Bagaimana dapat ditunjukkan daerah penyelesaian sistem pertidak-samaan?

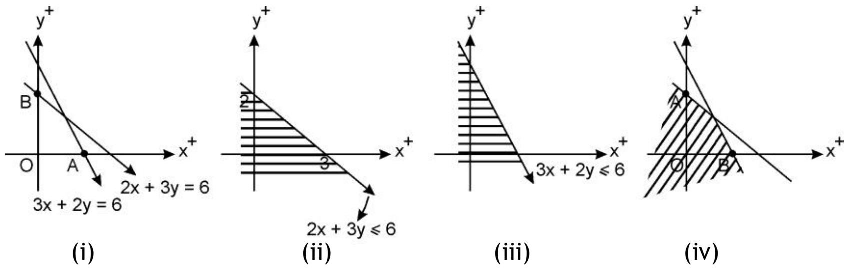
$2x + 3y \leq 6$ (i)

$3x + 2y \leq 6$ (ii)

$x \geq 0,\ y \geq 0$ (iii)

Langkah-langkah untuk menjawab pertanyaan tersebut adalah sebagai berikut.

1. Digambarkan garis pertama dengan persamaan $2x + 3y = 6$ dan garis kedua $3x + 2y = 6$ yang ditunjukkan pada Gambar 1.2(i).
2. Mengarsir daerah penyelesaian tiap pertidaksamaan (Gambar 1.2 (ii)) dan (Gambar 1.2 (iii)).
3. Daerah arsiran (Gambar 1.2. (iv)) menunjukkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (i) dan (ii).
4. Daerah AOB pada Gambar 1.2 (iv) menunjukkan daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan (i), (ii), dan (iii).




Gambar 1.2

Bagaimana penyelesaian melalui penerapan konsep penyelesaian basic pertidaksamaan dengan dua atau tiga variabel?

Perhatikan:

(i) $2x + 3y \leq 6$

Dengan menambahkan konstanta (dapat juga variabel) s ke ruas kiri, kita memperoleh:

$2x + 3y + s = 6$

bila s = t; t adalah konstanta

maka $2x + 3y = 6 - t$; dan untuk y = u

$2x = 6 - t - 3u$; jadi pertidaksamaan

$2x + 3y \leq 6$ mempunyai banyak sekali penyelesaian; Ingat: bidang adalah himpunan tak hingga pasangan berurutan (x, y).

(ii) $2x + 3y \leq 6$

$3x + 2y \leq 6$

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$

dengan menambahkan variabel penambah (*slack*) u dan z maka sistem pertidaksamaan menjadi sistem persamaan

$2x + 3y + u = 6$

$3x + 2y + v = 6$; u dan v adalah variabel slack $u \geq 0$; $v \geq 0$

Selanjutnya, digunakan prosedur penyelesaian basic sistem persamaan untuk menjelaskan penyelesaian sistem pertidaksamaan.

Untuk banyaknya variabel, n = 4 dan banyaknya persamaan, m = 2 maka melalui penerapan pengertian rank matriks diperbesar, diperoleh banyaknya penyelesaian sistem pertidaksamaan adalah tak hingga.

**Contoh 1.13**

Perhatikan sistem pertidaksamaan dan dengan pengetat nonnegatif untuk variabel.

$3x + 2y \leq 12$

$3x + 4y \leq 18$

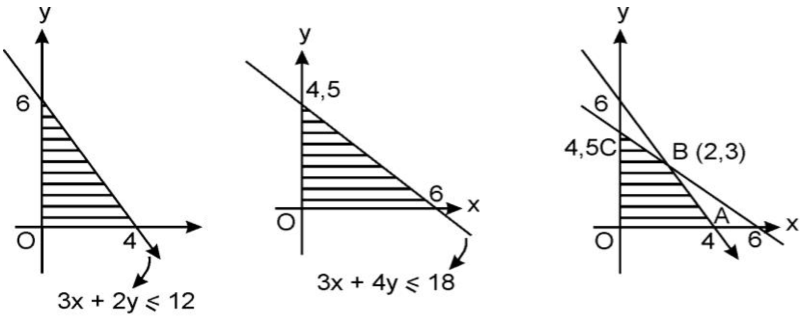
$x \geq 0$, $y \geq 0$

Gambarlah daerah penyelesaian dan tentukan nilai terbesar (Max) $Z = 4x + 5y$.

Bagaimana caranya mendapatkan nilai Z maksimum?

1. Gambarlah garis g dengan persamaan $3x + 2y = 12$ dan garis t dengan pertama $3x + 4y = 18$ pada bidang XOY (Gambar 1.3 (i) dan (ii)).
2. Arsirlah daerah hasil layak (penyelesaian) Gambar 1.3 (iii)

3. Cari koordinat titik-titik sudut poligon pembatas daerah hasil layak
4. Pasangan berurutan (x,y) di A, B dan C disubstitusikan ke T dan ternyata diperoleh T = 4.2 + 5.3 = 23 hasil substitusi (2,3) sebagai nilai optimal. Lihat penjelasan yang tersajikan pada Gambar 1.3.




(i) (ii) (iii)

Gambar 1.3

Analisis:

1. Daerah hasil layak adalah bidang OABC; A dan C ialah titik potong garis pembatas dengan sb. x dan sb.y. B ialah titik potong garis g dengan garis t dengan koordinat (2.3).
2. A (4,0) ………..... Z = 4x + 5y = 16

   B (2,3) ………..... Z = 8 + 15 = 23

   C $\left(0, 4\frac{1}{2}\right)$ .......... $Z = 0 + 22\frac{1}{2} = 22\frac{1}{2}$

Nilai Maksimum Z dicapai pada x = 2 dan y = 3 atau nilai optimal Z ditentukan oleh pasangan (2,3).

Mengapa hanya diperhatikan titik sudut poligon OABC untuk menentukan nilai maksimum Z?. Silakan diberikan komentar sebagai latihan.

**Contoh 1.14**

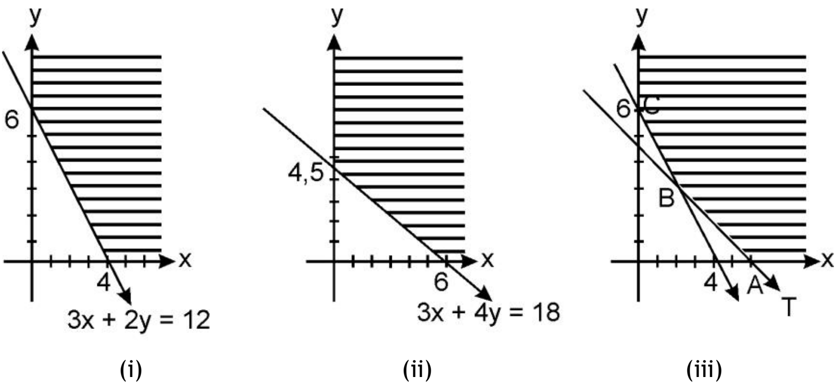
Tentukan nilai optimal Z = 4x + 5y yang dicapai di tiap (x, y) sebagai penyelesaian sistem pertidaksamaan:

$3x + 2y \geq 12$

$3x + 4y \geq 18$

$x \geq 0$ dan $y \geq 0$

*Penyelesaian:*
1. Gambarlah garis $3x + 2y = 12$ dan $3x + 4y = 18$
2. Daerah penyelesaian layak hasil adalah bidang yang terbuka ke kanan (lihat Gambar 1.4).




Gambar 1.4

Dengan memperhatikan Gambar 1.4 (iii) nilai minimum Z dapat dicari dengan cara substitusi pasangan berurutan di A, B, dan C ke $Z = 4x + 5y$. Koordinat titik A, B, dan C masing-masing adalah (6,10), (2,3), dan (0,6). Nilai Z yang dicapai adalah $Z_A = 24$, $Z_B = 23$, dan $Z_C = 30$. Kesimpulan nilai optimum (minimum) $Z = 23$ yang dicapai di titik B.

**Contoh 1.15**

Gambarlah grafik dan daerah hasil sistem pertidaksamaan:

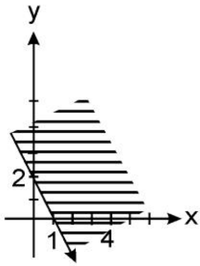
$2x + y \geq 2$ …. (i)

$4x + 3y \leq 12$ …. (ii)

$0,5 \leq x \leq 2$ ….(iii)

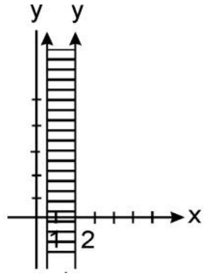
$x, y \geq 0$ ….(iv)

Carilah nilai ekstrim (optimal) $Z = 4x + 5y$



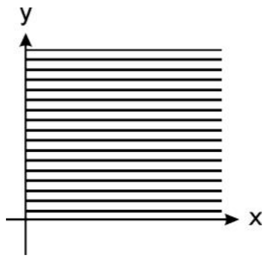

$2x \geq 0, Y \geq 0$

(i)



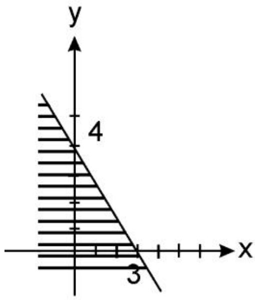

$\frac{1}{2} \leq x \leq 2$

(iii)



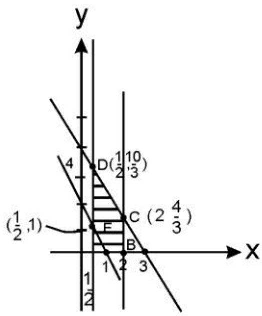

$X \geq 0,\ Y \geq 0$

(iv)




$2x + 3y \leq 12$

(ii)




(v)

Gambar 1.5

| | x | y | Z = 4x + 5y |
|---|---|---|---|
| A | 1 | 0 | 4 |
| B | 2 | 0 | 8 |
| C | 2 | $\frac{4}{3}$ | $\frac{44}{3}$ |
| D | $\frac{1}{2}$ | $\frac{10}{3}$ | $\frac{56}{3}$ |
| E | $\frac{1}{2}$ | 1 | 7 |

Dari pasangan berurutan pada titik kritis A, B, C, D, dan E dapat disimpulkan bahwa nilai maksimum $Z = \frac{56}{3}$ dipenuhi pada pasangan berurutan di titik D dan nilai minimum Z = 4 dicapai di titik A.

Apakah dapat ditentukan penyelesaian sistem pertidaksamaan linear dengan dua variabel pokok melalui penerapan konsep penyelesaian dasar (basic) sistem persamaan? Dengan tegas dijawab dapat (Ya). Langkah-langkah yang dilakukan adalah: (1) nyatakan sistem pertidaksamaan tersebut menjadi bentuk baku (sistem persamaan dengan menambahkan variabel penambah positif (*slack variabel*), (2) ditentukan penyelesaian dasar dari sistem persamaan yang terbentuk melalui langkah pertama.

Sebagai penjelasan, diperhatikan Contoh 1.13 dan 1.14 untuk ditentukan penyelesaian basicnya.

**Contoh 1.16**

Carilah penyelesaian dasar sistem pertidaksamaan:

$3x_1 + 2x_2 \geq 12$
$3x_1 + 4x_2 \geq 18$
$x_1 \geq 0$ dan $x_2 \geq 0$

*Penyelesaian:*

(1) Bentuk baku

$$3x_1 + 2x_2 - s_1 + r_1 = 12 \qquad (1.9)$$
$$3x_1 + 4x_2 - s_2 + r_2 = 18$$

$s_1$ dan $s_2$ adalah penambah negatif (*surplus variables*)

$r_1$ dan $r_2$ adalah penambah positif karena ada pengetat non-negatif (*artifisal variables*).

(2) Karena m = 2 dan n = 6 maka terdapat 15 penyelesaian basic, di antaranya:

(i) $x_1 = x_2 = s_1 = s_2 = 0$ (non basic) maka $r_1 = 12$ dan $r_2 = 18$

(ii) $x_2 = r_2 = s_1 = s_2 = 0$ (non basic) maka $x_1$ dan $r_1$ diperoleh dari

$3x_1 + r_1 = 12$
$3x_1 = 18;$

Diperoleh $x_1 = 6$ dan $r_1 = -6$, namun bukan penyelesaian layak hasil karena $r_1$ negatif.

(iii) $x_2 = r_1 = s_2 = r_2 = 0$, diperoleh $x_1$ dan $s_1$ dari

$3x_1 - s_1 = 12$

$3x_1 \qquad = 18$ ; diperoleh $x_1 = 6$ dan $s_1 = 6$

Pada gambar Contoh 1.14, ditunjukkan di titik A

(iv) $x_1 = r_1 = s_1 = r_2 = 0$, diperoleh $x_2$ dan $s_2$ dari

$2x_2 \qquad = 12$

$4x_2 - s_2 = 18$ ; diperoleh $x_2 = 6$ dan $s_2 = 6$

Pada Contoh 1.14 ditunjukkan di titik C

(v) $x_2 = s_1 = s_2 = r_1 = 0$, diperoleh $x_1$ dan $r_2$ dari

$3x_1 \qquad = 12$

$3x_1 \quad + r_2 = 18$

$x_1 = 4.\ r_2 = 6$

(vi) $x_1 = s_1 = s_2 = r_2 = 0$, diperoleh $x_2$ dan $s_2$ dari

$2x_2 + r_1 = 12$

$4x_2 \qquad = 18$, diperoleh $x_2 = 4\frac{1}{2}$ dan $r_1 = 3$

(vii) $s_1 = s_2 = r_1 = r_2 = 0$, $x_1$ dan $x_2$ diperoleh dari

$3x_1 + 2x_2 = 12$

$3x_1 + 4x_2 = 18$

$x_1 = 2$ , $x_2 = 3$, ditunjukkan di titik B.

Delapan penyelesaian dasar lainnya tampaknya mudah diperoleh dengan memperhatikan cara mendapatkan tujuh penyelesaian dasar di atas. Silakan diskusikan dengan teman-teman Anda mengenai prosedur penyelesaian dasar untuk mendapatkan penyelesaian layak hasil dari sistem pertidaksamaan berikut.

**Bahan Diskusi**

Jawablah beberapa soal berikut.

1. Diberikan

   $Z = 100x_1 + 125x_2$

   $3x_1 + 5x_2 \leq 15$

   $7x_1 + 3x_2 \leq 21$

   $x_1 \geq 0$ , $x_2 \geq 0$

   a. Gambarkan daerah layak hasil!
   b. Melalui penerapan konsep penyelesaian dasar (basic), carilah semua penyelesaian layak basic yang mungkin!
   c. Berapakah nilai maksimum Z?

2. Diberikan

   $Z = 250x_1 + 225\,x_2$

   $18x_1 + 20x_2 \geq 360$

   $36x_1 + 15x_2 \geq 360$

$18x_1 - 15x_2 \leq 270$

$x_1 \geq 0$ ; $x_2 \geq 0$

a. Gambarkan daerah layak hasil!
b. Melalui penerapan penyelesaian dasar, carilah enam penyelesaian layak hasil yang memenuhi syarat variabel bernilai nonnegatif!
c. Berapa nilai minimum Z?

## B. SISTEM PERTIDAKSAMAAN LINEAR DENGAN TIGA VARIABEL POKOK

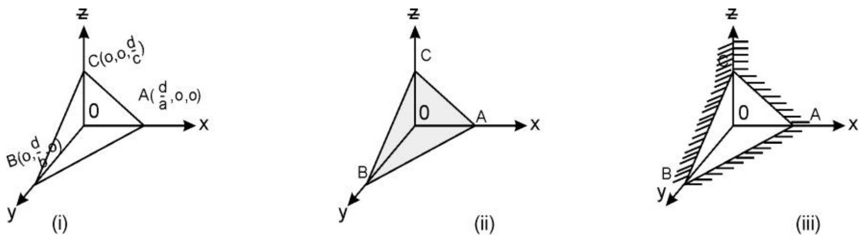
Diberikan persamaan dan pertidaksamaan,

$ax + by + cz = d$ .... (i); $ax + by + cz \leq d$ .... (ii)

$ax + by + cz \geq d$ .... (iii); dengan $x \geq 0; y \geq 0, z \geq 0$.

Andaikan a, b, c dan d konstanta positif. Dengan memperhatikan variabel x nonnegatif maka secara geometris daerah penyelesaian dari (i), (ii), dan (iii) terdapat dalam oktan I atau dalam ruang yang dibatasi oleh bidang $X^+OY^+$, $X^+OZ^+$, dan $Y^+OZ^+$ .x,y,z $\geq$ 0.

1. Daerah penyelesaian ax + by + cz = d terdapat pada bidang yang melalui $A\left(\frac{d}{a},0,0\right)$; $B\left(0,\frac{d}{b},0\right)$; $C\left(0,0,\frac{d}{c}\right)$, lihat Gambar 1.6 (i)
2. Daerah penyelesaian $ax + by + cz \leq d$; x, y, z $\geq$ 0 adalah bangun ruang (limas O.ABC) yang dibatasi oleh bidang XOY, XOZ, YOZ, dan ax + by + cz = d. Lihat Gambar 1.6 (ii)
3. Daerah penyelesaian $ax + by + cz \geq d$; x, y, z $\geq$ 0 adalah bangun ruang pada permukaan bidang ax + by + cz = d dan di luar limas O.ABC. Lihat Gambar 1.6 (iii).




Gambar 1.6

Jika terdapat kombinasi lain yang berkaitan dengan tiga variabel pokok x, y, z maka pemahaman konsep bangun ruang (dimensi) merupakan suatu kebutuhan.

**Contoh 1.17**

Tunjukkan dengan gambar daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan:

$4x + 3y + 2z \leq 12$

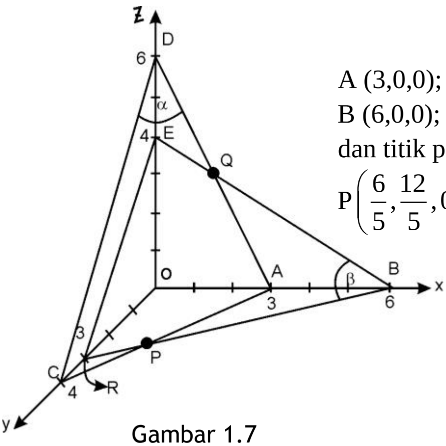
$2x + 4y + 3z \leq 12$

$x, y, z \geq 0$

Untuk itu, gambarlah bidang: $\alpha : 4x + 3y + 2z = 12$

$\beta : 2x+4y+3z= 12$

Lihat Gambar 1.7




Gambar 1.7

A (3,0,0); C (0,4,0); D (0,0,6)

B (6,0,0); R (0,3,0); E (0,0,4)

dan titik pada irisan antara dua bidang, yaitu:

$P\left(\frac{6}{5}, \frac{12}{5}, 0\right) \quad Q\left(\frac{3}{2}, 0, 3\right)$

atau P perpotongan antara garis:

$z = 0$; $4x + 3y = 12$ dan

$z = 0$; $2x + 4y = 12$

dan Q perpotongan antara garis:

$y = 0$; $4x + 2z = 12$ dan

$y = 0$; $2x + 3z = 12$

Daerah penyelesaian layak hasil terdapat pada ruang yang dibatasi oleh limas terpancung ORE.APQ.

Berapakah nilai maksimum $T = 2x + 3y + z$? Bagaimanakah menentukan nilai maksimum T? Berdasarkan informasi yang ditunjukkan pada gambar maka diperlukan penyajian data tersebut dengan bantuan tabel. Dari informasi pada tabel, nilai-nilai tripel (x,y,z) disubstitusikan sehingga diperoleh:

| | x | Y | z | T = 2x + 3y + z |
|---|---|---|---|---|
| O | 0 | 0 | 0 | 0 |
| A | 3 | 0 | 0 | 6 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| P | $\frac{6}{5}$ | $\frac{12}{5}$ | 0 | 9,6 |
| R | 0 | 3 | 0 | 9 |
| Q | 1,5 | 0 | 3 | 6 |
| E | 0 | 0 | 4 | 4 |

Nilai maksimum T = 9,6 ditentukan oleh tripel (x, y, z) yang terdapat pada irisan kedua bidang yang diketahui dan dalam ruang penyelesaian dasar layak (limas terpancung ORE. APQ).

**Contoh 1.18**

Tentukan nilai minimum T = 2x + 3y + 4z dalam sistem pertidaksamaan:

$4x + 3y + 2z \geq 12$

$2x + 4y + 3z \geq 12$

$x \geq 0; y \geq 0; z \geq 0$

*Penyelesaian:*

1. Gambar bidang $\alpha$ dan $\beta$ (lihat Gambar 1.7).
2. Daerah yang dibatasi oleh bidang BPQ dan CPQD dalam ruang $x^+oy^+$ dan bagian bidang $\alpha$ dan $\beta$ (lihat Gambar 1.7) merupakan daerah penyelesaian layak hasil.

Dengan prosedur yang sama seperti mencari nilai maksimum T dilakukan perhitungan dengan bantuan tabel dalam penyajiannya.

| | x | y | z | T = 2x + 3y + 4z |
|---|---|---|---|---|
| B | 6 | 0 | 0 | 12 |
| P | 1,2 | 2,4 | 0 | 2,4 + 7,2 = 9,6 |
| Q | 1,5 | 0 | 3 | 3 + 0 + 12 = 15 |
| D | 0 | 0 | 6 | 0 + 0 + 24 = 24 |
| C | 0 | 4 | 0 | 0 + 12 + 0 = 12 |

Nilai minimum dicapai pada titik P yang terletak pada irisan antara dua bidang pembentuk sistem pertidaksamaan di atas.

Perhatikan kembali sistem pertidaksamaan pada Contoh 1.7 jika variabel baru u dan v ditambahkan maka sistem pertidaksamaan ini menjadi:

$$4x + 3y + 2z + u = 12 \qquad \text{(i)}$$
$$2x + 4y + 3z + v = 12 \qquad \text{(ii)} \qquad (1.10)$$
$$x \geq 0\ ;\ y \geq 0;\ z \geq 0;\ u \geq 0;\ v \geq 0$$

Terdapat 2 persamaan dan 5 variabel maka sistem persamaan mempunyai banyak sekali penyelesaian. Untuk itu, dipilih penyelesaian dasar (basic) yang layak sebagai penyelesaian sistem persamaan (1.10). Caranya, dengan melalui daftar berikut.

| Variabel basic | Variabel non-basic | Keterangan |
|---|---|---|
| u = 12; v = 12 (1) | x = 0; y = 0; z = 0 | layak |
| u = - 12; x =6 | v = 0; y = 0; z = 0 | tidak layak |
| u = 3; y = 3 (2) | x = 0; v = 0; z = 0 | layak |
| u = 4; z = 4 (3) | x = 0; y = 0; v = 0 | layak |
| x = 3; v = 6 (4) | u = 0; y = 0; z = 0 | layak |
| y = 4; v = - 4 | x = 0; u = 0; z = 0 | tidak layak |
| z = 6; v = - 6 | x = 0 ; y = 0 ; u = 0 | tidak layak |
| $x = \frac{6}{5}$ ; $y = \frac{12}{5}$ (5) | u = 0 ;v = 0; z = 0 | layak |
| $x = \frac{3}{2}$ ; z = 3 (6) | u = 0; y = 0; v =0 | layak |
| y =12; z = - 12 | x = 0; u = 0; v = 0 | tidak layak |

*Catatan:* Disebut layak hasil kalau dipenuhi nilai variabel nonnegatif. Jadi, penyelesaian itu tidak dasar layak atau layak hasil jika pada penyelesaian tersebut terdapat variabel yang bernilai negatif.

Bagaimana nilai $T = 2x + 3y + z$?

$$T_{(1)} = 0;\ T_{(2)} = 9\ ;\ T_{(3)} = 4;\ T_{(4)} = 6$$
$$T_{(5)} = \frac{12}{5} + \frac{36}{5} = 9{,}6\ ;\ T_{(6)} = 6$$

Dengan demikian, nilai maksimum T = 9,6 yang sama ditunjukkan dengan metode grafik.

**Bahan Diskusi**

Perhatikan sistem pertidaksamaan dan carilah penyelesaian dengan metode grafik.

Diberikan sistem pertidaksamaan:

$$\begin{aligned} 4x + 3y + z &\leq 19 \\ 2x + 3y + 4z &\leq 21 \\ x + 2y + 3z &\leq 14 \end{aligned}$$

$x \geq 0$, $y \geq 0$ , dan $z \geq 0$

Petunjuk untuk mengerjakan soal latihan.

1. Langkah pertama yang dilakukan adalah menggambar 3 bidang datar yang ditunjukkan sebagai pembatas pada koordinat Cartesius XYZ (lihat Contoh 1.7).

   Bidang (i) $4x + 3y + z = 19$
   (ii) $2x + 3y + 4z = 21$
   (iii) $x + 2y + 3z = 14$

   Kemudian arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ yang memenuhi masing-masing pertidaksamaan sebagai pembatas tersebut. Penyelesaian sistem pertidaksamaan dapat diidentik melalui himpunan titik-titik (x, y, z) yang terdapat pada bangun ruang berbentuk ................
   (silakan Anda jawab setelah menggambar).
   Selanjutnya, cari koordinat titik sudut bangun ruang dengan cara mencari penyelesaian sistem persamaan, yaitu 2 persamaan simultan (i) dan (ii); (i) dan (iii); (ii) dan (iii); dan tiga persamaan simultan (i), (ii), dan (iii).
2. Masukkan pada ruas kiri tiap pertidaksamaan, secara berurutan variabel nonnegatif u,v, dan w sehingga sistem pertidaksamaan menjadi:

$$\begin{aligned} 4x + 3y + z + u &= 19 \\ 2x + 3y + 4z + v &= 21 \\ x + 2y + 3z + w &= 14 \end{aligned}$$

Sekarang terdapat 3 persamaan dengan 6 variabel. Untuk mendapatkan penyelesaian layak hasil, perhatikan kembali penerapan rank matriks koefisien dan rank matriks yang diperbesar sistem persamaan yang dipelajari pada kegiatan belajar I. Tiap penyelesaian dasar (basic) diperoleh melalui ditetapkan 3 variabel non-basic yang diberikan nilai nol. Misalnya variabel basic pertama u, v, dan w; variabel non-basic x, y, dan z, dan seterusnya. Dengan demikian, banyaknya penyelesaian basic yang mungkin adalah ${}_6C_3 = 20$. Sebagai catatan: Penyelesaian dasar layak adalah penyelesaian dasar di mana nilai variabel basic selalu nonnegatif. Jika fungsi linear $T = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$ maka nilai variabel u, v, dan w tetap bernilai nol Mengapa? Karena u, v, w hanya dimaksudkan sebagai variabel penambah (*slack*) yang diperlukan sistem pertidaksamaan ditransformasikan menjadi sistem persamaan.

## C. SISTEM PERTIDAKSAMAAN DENGAN EMPAT VARIABEL POKOK (ATAU LEBIH)

Prosedur yang sama pada pertidaksamaan dengan 3 variabel pokok, penyelesaian pertidaksamaan linear dengan 4 variabel ditentukan melalui cara menambahkan variabel penambah positif (*slack variables*) atau penambah negatif (*surplus variables*) bergantung pada tanda pertidaksamaan. Penerapan metode grafik seperti bahasan tentang dua variabel atau tiga variabel tidak disajikan pada pasal ini.

Tinjau (i) $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1$

(ii) $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2$

(iii) $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq b_3$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0;\ x_4 \geq 0$

Jika diperhatikan pertidaksamaan yang diberikan maka bentuk pertidaksamaan dapat diubah menjadi bentuk persamaan (bentuk baku) melalui ditambahkannya variabel slak $s_1$ ke ruas-kiri (i) dan $s_2$ ke ruas kiri (ii), $s_3$ ke ruas kiri (iii). Sistem persamaan yang diperoleh adalah:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + s_1 \qquad\quad &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + x_{23}x_3 + x_{24}x_4 \qquad + s_2 \quad\ &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \qquad\qquad + s_3 &= b_3 \end{aligned} \qquad (1.11)$$

Banyaknya penyelesaian sistem persamaan (1.11) tak hingga sehingga dimungkinkan untuk digunakannya penyelesaian dasar layak. Untuk itu perlu diperhatikan pada tiap penyelesaian terdapat tiga variabel dasar (basic) dan empat variabel. Hal ini karena terdapat matriks diperbesar berdimensi 3 × 4. Demikian pula disepakati untuk diberikan nilai dari tiap variabel non-basic adalah nol. Melalui penerapan metode penyelesaian dasar (*basic*), diperoleh banyaknya penyelesaian dasar dari sistem persamaan (1.11) adalah:

$$_6C_2 = \ _7C_3 = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3!4!} = \frac{5\times6\times7}{1\times2\times3} = 35$$

Salah satu penyelesaian basic dari sistem pertidaksamaan (1.11) adalah: $s_1 = b_1$; $s_2 = b_2$; $s_3 = b_3$ , $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$.

Dapat saja banyaknya penyelesaian dasar dari (1.11) kurang dari 35. Mengapa?

**Contoh 1.19**

Carilah penyelesaian dasar sistem pertidaksamaan:

$$2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 12 \text{ ............(i)}$$
$$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 12 \text{ ........... (ii)}$$
$$x_j \geq 0 \text{ ; } j = 1,2,3,4$$

atau nilai $x_j$, j = 1, 2, 3, 4 adalah non-negatif.

*Penyelesaian:*

Tambahkan variabel slack $x_5$ pada pertidaksamaan (i) dan $x_6$ pada pertidak- samaan (ii), dengan demikian diperoleh:

$2x_1 + 2x_2 + 4x_2 + 3x_4 + x_5 = 12$ (*)

$4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_6 = 12$

$x_i \geq 0$ untuk i= 1,2,3,4.

Terdapat n = 6 variabel dan m = 2 banyaknya persamaan. Banyaknya penyelesaian basic maksimum ${}_6C_2$ = 15. Selanjutnya, terdapat m = 2 persamaan maka banyak variabel basic pada tiap penyelesaian sebanyak dua variabel dan sebanyak empat variabel non-basic yang semuanya bernilai nol.

(1) Variabel basic $x_5$ dan $x_6$ ; non-basic $x_1$, $x_2$, $x_3$ dan $x_4$
(2) Variabel basic $x_5$ dan $x_1$ ; non-basic .......................
(3) Variabel basic $x_5$ dan $x_3$ ; .......................................
(4) Variabel basic $x_5$ dan $x_4$ ; ……………………………
(5) Variabel basic ………….; non-basic $x_5$, $x_2$, $x_3$, dan $x_4$
(6) Variabel basic ………….; non-basic $x_5$, $x_1$, $x_2$, dan $x_4$
.......
(14) Variabel basic ………….; non-basic $x_2$, $x_4$, $x_5$, dan $x_6$
(15) variabel basic $x_1$ dan $x_2$ , variabel non-basic ...........

*Penyelesaian:*

(1) Andaikan variabel non-basic $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$; variabel basic $x_5 = 12$ dan $x_6 = 12$ karena tidak terdapat variabel bernilai negatif maka penyelesaian basic tersebut adalah layak hasil.
(2) Andaikan variabel non-basic $x_1 = x_2 = x_3 = x_5 = 0$. Variabel basic $x_4$ dan $x_6$ dapat dicari dengan menyelesaikan persamaan matriks berikut.

$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$; diperoleh $x_4 = 4$ dan $x_6 = 4$. Penyelesaian layak hasil

(3) Andaikan variabel basic $x_1 = x_2 = x_3 = x_6 = 0$ maka variabel non-basic $x_4$ dan $x_5$ dapat ditentukan dari:

$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$; diperoleh $x_4 = 6$; $x_5 = -6$. Penyelesaian tak layak karena ada variabel basic bernilai negatif

(4) Andaikan variabel basic $x_3 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ maka variabel basic $x_1$ dan $x_2$ dapat ditentukan dari:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4}\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 12 \\ 12 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Dengan demikian $x_1 = 0$ dan $x_2 = 6$. Penyelesaian dasar ini disebut penyelesaian dasar (basic) degeneratif karena variabel basic $x_1 = 0$.

(5) Andaikan variabel non-basic $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ Carilah nilai variabel basic $x_1$ dan $x_3$. Sebagai latihan

(6) Andaikan variabel non-basic $x_2 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ Carilah nilai variabel basic $x_1$ dan $x_3$. Sebagai latihan

(7) Andaikan variabel non-basic $x_2 = x_3 = x_5 = x_6 = 0$ Carilah nilai variabel basic $x_1$ dan $x_4$. Sebagai latihan

(8) Andaikan variabel non-basic $x_1 = x_4 = x_5 = x_6 = 0$ Carilah nilai variabel basic $x_2$ dan $x_3$.

Sebagai latihan disarankan untuk mencari penyelesaian basic lain yang belum dijelaskan.

Catatan penting yaitu pengerjaan yang dilakukan itu berulang-ulang, digunakannya prosedur yang sama untuk menemukan penyelesaian basic sistem persamaan, m persamaan dan n variabel dengan m < n. Prosedur yang sama dan berulang ini dalam penyelesaian program linear (metode simplex) disebut pengerjaan yang iteratif. Pengerjaan yang iteratif dilakukan karena Rank($A_{m \times n}$) = Rank ($A_B$). Perhatikan contoh di atas:

$$A_B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 12 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 12 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 & 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Rank (A) = Rank $A_B$ = 2.

Penyelesaian layak hasil ditetapkan dengan memperhatikan dipenuhi-tidaknya nilai nonnegatif untuk setiap variabel basic. Penyelesaian degenerasi didapatkan jika terdapat satu atau lebih variabel dasar bernilai nol. Jika semua variabel basic tidak memenuhi syarat atau pengetat nonnegatif maka variabel basic tersebut dikatakan sebagai variabel nol. Penjelasan mengenai variabel nol dijelaskan pada pasal selanjutnya.

## D. REDUKSI SISTEM PERTIDAKSAMAAN

Program Linear merupakan bagian dari studi mengenai pertidaksamaan linear sehingga penting meningkatkan pemahaman dasar-dasar struktur matematis. Hal ini terkait dengan pengembangan metode simplex, sebagai contoh adanya penambahan variabel artifisial dalam prosedur untuk menyelesaikan masalah program linear. Dalam kondisi tertentu seperti terdapat persamaan redundan (berlebih) maka sistem dapat direduksi.

Perhatikan sistem pertidaksamaan linear yang dinyatakan dalam bentuk baku (*standard form*):

$$Ax = b \qquad (1.12)$$
$$x \geq 0$$

A adalah matriks dengan orde m × n, b adalah konstanta tak-nol (*constant nonzero*), vektor kolom dengan dimensi m; x adalah variabel yang dinyatakan dalam vektor kolom dimensi n. Suatu titik x yang memenuhi kondisi pada (1.12) disebut sebagai penyelesaian (solusi). Himpunan yang beranggotakan semua penyelesaian dinyatakan sebagai himpunan semesta s. Dengan memasukkan variabel slack, surplus, dan artifisal diperoleh alternatif sistem yang mempunyai penyelesaian yang sama pada S. Pada pasal ini dibahas topik reduksi pertidaksamaan linear, yaitu: persamaan redundan (*redundant equations*), variabel nol (*null variables*), dan variabel noneksternal (*nonextermal variables*) yang penerapannya disajikan pada bahasan mengenai metode simplex dan primal-dual suatu masalah program linear.

**1. Persamaan redundan**

Terkadang diperlukan menyederhanakan sistem pertidaksamaan linear yang diberikan sebagai pembatas (kendala, *constraint*) suatu program linear. Hal ini muncul karena pada pembatas tersebut muncul lebih dari satu pertidaksamaan dengan koefisien-koefisien variabelnya sebanding sehingga diperlukan mengeliminasi pertidaksamaan yang redundan dari pembatas tersebut atau mereduksi sistem pertidaksamaan.

**Contoh 1.20**

Diberikan sistem pertidaksamaan:

$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \qquad \text{(i)}$$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 6 \qquad \text{(ii)}$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12 \qquad \text{(iii)}$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0.$$

Pada contoh ini pertidaksamaan (iii) disebut sebagai persamaan yang redundan. Penjelasan lebih lanjut disajikan pada penerapan metode simplex untuk menyelesaikan suatu program linear.

**2. Variabel Nol (*Null Variables*)**

**Definisi 1.10**

Diberikan sistem pertidaksamaan linear yang dinyatakan dalam bentuk baku

$$Ax = b$$
$$x \geq 0$$

Suatu variabel $x_i$ dikatakan menjadi variabel nol jika $x_i = 0$ pada setiap penyelesaian.

**Contoh 1.21**

Bagaimanakah variabel nol dapat tampak pada sistem berikut?

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 4x_4 = 16$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8$$
$$x_1 \geq 0 \quad x_2 \geq 0 \quad x_3 \geq 0 \quad x_4 \geq 0$$

Melalui pengurangan dua kali persamaan kedua dari persamaan pertama diperoleh $x_2 + 2x_4 = 0$. Dalam hal ini $x_2 = 0$ dan $x_4 = 0$ sebagai suatu penyelesaian karena tidak dipenuhinya variabel $x_2$ dan $x_4$ non negatif. Jadi $x_2$ dan $x_4$ adalah variabel nol (*null variables*). Dari contoh tersebut dapat dijelaskan bahwa jika kombinasi linear dari persamaan dapat diperoleh sedemikian hingga ruas kanan adalah nol sedangkan koefisien variabel ruas kiri semuanya tidak nol atau positif maka variabel yang berkorespondensi dengan koefisien positif pada persamaan adalah variabel nol. Dengan kata lain, apabila dari persamaan asli kemungkinan diperoleh kombinasi linear sebagai berikut

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \cdots + \xi_n x_n = 0$$

dengan $\xi_i \geq 0$ , i = 1, 2, ..., n berakibat $x_i$ adalah variabel nol.

### 3. Variabel Non-ekstermal (*Nonextermal Variables*)

Untuk menjelaskan variabel non-eksternal ditampilkan suatu contoh sistem pertidaksamaan.

**Contoh 1.22**

Perhatikanlah sistem pertidaksamaan:

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 6 \\ x_i \geq 0,\ i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Melalui operasi mengurangkan persamaan kedua dari pertama dan disusun kembali (*rearranging*), didapatkan:

$$x_1 = 2 + 2x_2 + x_3$$

Dari pernyataan di atas $x_2$ dan $x_3$ bernilai non-negatif, sementara $x_1$ yang didapatkan melalui pengerjaan di atas lebih dari atau sama dengan 2 pada penyelesaian persamaan. Hal ini menunjukkan bahwa $x_1 \geq 0$ dapat dihilangkan dari himpunan semula, dan $x_1$ dapat dinyatakan sebagai variabel bebas, sekalipun pertidaksamaan sisanya secara aktual tidak sepenuhnya bebas. Oleh karena itu, $x_1$ dapat diganti setiap saat oleh $x_1 = 2 + 2x_2 + x_3$ pada sistem persamaan semula sehingga diperoleh:

$$\begin{aligned} &5x_2 + 5x_3 = 2 \\ &x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0 \\ &x_1 = 2 + 2x_2 + x_3 \end{aligned}$$

Contoh 1.22 sebagai ilustrasi mengenai konsep variabel eksternal.

**Definisi 1.11**

Suatu variabel $x_i$ pada sistem pertidaksamaan:

$$Ax = b \; ; \; x \geq 0 \qquad (1)$$

Disebut variabel non-eksternal jika $x_i \geq 0$ pertidaksamaan (1) redundan.

Satu variabel non-eksternal dapat dinyatakan sebagai variabel bebas, dan dapat dieliminasi melalui penggunaan satu persamaan untuk mendefinisikan sebagai variabel lainnya. Akibatnya, sistem yang baru berkurang satu variabel dan satu persamaan. Penyelesaian sistem persamaan mula-mula dapat diperoleh dari penyelesaian persamaan baru melalui substitusi ke dalam pernyataan untuk nilai dari variabel bebas.

## LATIHAN

Untuk meningkat kompetensi dasar Anda setelah mempelajari materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Gambar daerah penyelesaian pertidaksamaan:
   a) $3x + 2y \leq 6$
   b) $2x - 5y \geq 10$
   c) $5x + 2y \leq 4$
   d) $5x + 7y \geq 35$
2) Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan dan tentukan koordinat titik sudut yang terbentuk:
   a) $x + y \leq 1$
      $x - y \leq 1$
   b) $2y - x \leq 2$
      $2y - 3x \leq -1$
   c) $x + 2y \leq 12$
      $2x + y \leq 12$
      $x \geq 0 \; ; \; y \geq 0$
   d) $3x + 4y \leq 12$
      $x + 6y \leq 30$
      $1 \leq x \leq 3$
3) Gambar daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan:
   a) $2x + 5y + 4z \leq 40$
      $5x + 4y + 2z \leq 40$
      $x \geq 0; \; y \geq 0; \; z \geq 0$

b) $2x + 4y + 5z \leq 60$
$4x + 5y + 2z \leq 60$
$5x + 2y + 4z \leq 60$
$x \geq 0$ ; $y \geq 0$ ; $z \geq 0$

4) Tentukan nilai maksimum $Z = 3x + 4y$; x dan y adalah variabel penyelesaian sistem:
$2x + y \leq 12$
$x + 2y \leq 12$
$x \geq 0$ ; $y \geq O$

5) Tentukan nilai maksimum dari $T = 2x + 2y + 3z$; x, y, z adalah penyelesaian dari:
$2x + 5y + 4z \leq 40$
$5x + 4y + 2z \leq 40$
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$

6) Masukan variabel penambah (*slack*) nonnegatif ke ruas kiri setiap pertidaksamaan, kemudian carilah semua penyelesaian dasar dan identifikasi penyelesaian layak hasil yang diperoleh. Demikian pula identifikasi ada tidaknya penyelesaian degenerasi:
a) $3x + 4y \leq 12$
$5x + 3y \leq 15$
$x \geq 0$ ; $y \geq 0$
b) $3x + 4y + 2z \leq 24$
$2x + 3y + 4z \leq 24$
$x \geq 0$; $y \geq 0$ ; $z \geq 0$
c) $4x + 3y \leq 18$
$3x + 5y \leq 19$
$2x + 3y \leq 12$
$x \geq 0$; $y \geq 0$

*Petunjuk Jawaban Latihan*

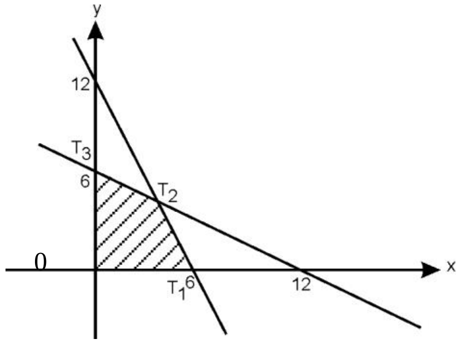
1) Gambarlah garis (a) $3x + 2y = 6$ kemudian substitusi (x, y) yang dalam hal ini (0,0) ke dalam pertidaksamaan dan perhatikan nilai kebenaran pernyataan itu.
Kalau ternyata benar, lihat di mana letak (0,0) itu dan arsir daerah yang sesuai. Gambar garis (b) $2x - 5y = 10$, kemudian substitusi (0,0) ke dalam pertidaksamaan, akan diperoleh $0 \geq 10$ menghasilkan pernyataan

yang salah sehingga daerah penyelesaian pertidaksamaan terdapat sebelah bawah/kanan $2x - 5y = 10$. (c) Cara yang sama untuk menggambar (arsiran) daerah penyelesaian $x + 2y \leq 4$; hanya saja himpunan titik pada garis $x + 2y = 4$ adalah penyelesaian pertidaksamaan dan arsiran ke arah titik (0,0).

2) Proses menjawab soal ke-2 merupakan lanjutan dari pekerjaan pada nomor 1).
   a) perlu menggambar garis dengan persamaan $x + y = 1$ dan $x - y = 1$ dalam satu bidang xoy; kemudian arsir daerah yang memenuhi sistem pertidaksamaan.
   b) perlu menggambar garis $2y - x = 2$ dan $y - 3x = -1$ kemudian arsir daerah dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.
   c) gambar garis $x + 2y = 12$, melalui A(12,0) dan B(0,6) kemudian gambar garis $2x + y = 12$, melalui C(6,0) dan D(0,12). Arsir daerah dalam bidang $x^+oy^+$ yang memenuhi sistem pertidaksamaan.
   d) gambar garis $3x + 4y = 12$ melalui A(4,0) dan B(0,3)
      gambar garis $5x + 6y = 30$ melalui C(6,0) dan D(0,5)
      gambar garis $x = 1$ dan $x = 3$
      arsir daerah sesuai dengan tanda pertidaksamaan
      Daerah penyelesaian terdapat pada poligon PQRS; P dan Q adalah perpotongan $x = 1$ dengan garis AB dan CD; R dan S adalah perpotongan garis $x = 3$ dengan CD dan AB.

3) a) Gambar bidang-bidang datar $2x + 5y + 4z = 40$ dan $5x + 4y + 2z = 40$ kemudian arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.
   b) Gambar bidang $\alpha$: $2x + 4y + 5z = 60$ melalui A(30,0,0), B(0,15,0), C(0,0,12)
      gambar bidang $\beta$: $4x + 5y + 2z = 60$ melalui K(15,0,0), L(0,12,0), M(0,0,30)
      gambar bidang $\pi$: $5x + 2y + 4z = 60$ melalui P(12,0,0), Q(0,30,0), R(0,0,15)
      arsir daerah dalam ruang $X^+Y^+Z^+$ dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.

4) Gambar garis $x_1 + 2y = 12$ dan $2x_1 + y = 12$ kemudian arsir daerah itu dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan. Nilai $Z_1 = 18$; $Z_2 = 28$; $Z_3 = 24$




5) Gambar bidang $2x + 5y + 4z = 40$ yang melalui R(20,0,0); U(0,8,0); S(0,0,10)

$5x + 4y + 2z = 40$ yang melalui W(8,0,0); V(0,10,0); Z(0,0,20)

Arsir daerah yang terdapat dalam ruang dengan memperhatikan tanda pertidaksamaan.

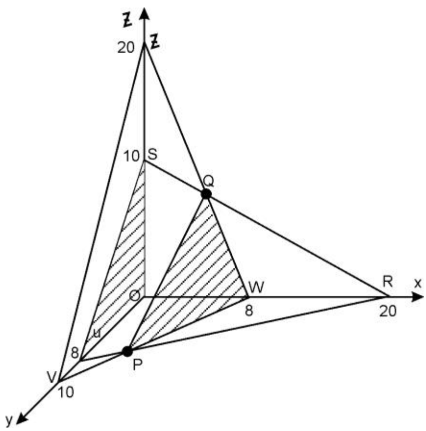
P adalah perpotongan garis $2x + 5y = 40$

$5x + 4y = 40$

Q adalah perpotongan garis $2x + 4z = 40$

$5x + 2z = 40$

Daerah penyelesaian pada bangun ruang OUS. WPQ (limas terpancung).
Substitusikan nilai x, y, dan z pada koordinat P, Q, W, S dan U ke dalam $T = 2x + 2y + 3z$ dan Anda akan peroleh nilai maksimum T.



6) a) Masukkan variabel slack u dan w sehingga sistem pertidaksamaan menjadi $3x + 4y + u = 12$

$5x + 3y + w = 15$

| | | |
|---|---|---|
| Penyelesaian dasar pertama | | (x, y, u, w) (0,0,12,15) |
| | kedua | (0,5,-8,0) tidak layak |
| | ketiga | (0,3,0,6) |
| | keempat | (3,0,3,0) |
| | kelima | (4,0,0,-5) tidak layak |
| | keenam | ( …, ….,0,0) silakan Anda lengkapi |

b) Masukkan variabel slack u dan w sehingga sistem pertidaksamaan menjadi $3x + 4y + 2z + u = 24$

$2x + 3y + 4z + w = 24$

| | | |
|---|---|---|
| Penyelesaian dasar pertama (x,y,z,u,w) (0,0,0,24,24) | | |
| | kedua | (0,0,6,12,0) |
| | ketiga | (0,0,12,0,-24) tidak layak |
| | | dan seterusnya |

c) Dengan memperhatikan penjelasan di atas, dipersilakan Anda untuk mencari penyelesaian soal 6.c tersebut sebagai latihan.

## RANGKUMAN

1. Sistem pertidaksamaan $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$ ; $a_{11}$, $a_{12}$, $b_1$ konstanta

   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2$ ; $a_{21}$, $a_{22}$, $b_2$ konstanta

   $x_1 \geq 0$ ; $x_2 \geq 0$

   Dengan menambahkan variabel *slack* $s_1$ dan $s_2$, diperoleh bentuk ekuivalen atau dikonversi menjadi persamaan (bentuk baku )

   $$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + s_1 = b_1$$

   $$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + s_2 = b_2$$

   $$x_1 \geq 0 \text{ ; } x_2 \geq 0$$

   Dengan bantuan gambar, setengah bidang masing-masing dengan garis $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1$ dan $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2$ sebagai pembatas di kuadran I serta diarsir daerah penyelesaiannya. Daerah penyelesaian layak hasil berbentuk segi banyak (poligon). Dari daerah layak hasil tersebut, ditemukan titik-titik kritis yang digunakan untuk memperoleh nilai optimal fungsi linear $f(x_1,x_2) = c_1x_1+c_2x_2$; $c_1$dan $c_2$ adalah konstanta yang diketahui.
2. Sistem pertidaksamaan $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \geq b_1$ ; $a_{11}$, $a_{12}$, $b_1$ konstanta

   $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2$ ; $a_{21}$, $a_{22}$, $b_2$ konstanta

   $x_1 \geq 0$ ; $x_2 \geq 0$

Dengan mengurangkan variabel penambah (*surplus variables)* $y_1 \geq 0$ dan menambahkan variabel artifisial $r_1 \geq 0$, $r_2 \geq$ dan $y_2 \geq 0$, diperoleh bentuk yang ekuivalen atau sistem pertidaksamaan dikonversi ke bentuk baku

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 - y_1 + r_1 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 - y_2 + r_2 = b_2$$
$$x_1 \geq 0 \; ; x_2 \geq 0$$

Dengan bantuan gambar setengah bidang yang ditunjukkan oleh masing-masing pembatas dapat diidentifikasi daerah layak hasil dan titik kritis untuk menentukan nilai optimal fungsi linear $f(x_1,x_2) = c_1x_1+c_2x_2$; $c_1$dan $c_2$ adalah konstanta yang diketahui.

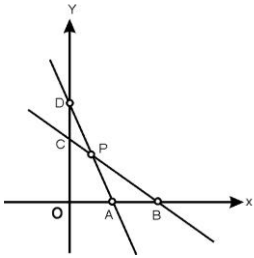
Banyaknya penyelesaian dasar adalah kombinasi dari n variabel dengan tiap pilihan m variabel, n adalah banyak variabel termasuk variabel penambah (*slack*) dan m adalah banyak persamaan; $m \leq n$; m variabel disebut variabel basic sedangkan n – m variabel disebut variabel non-basic.

3. Sistem pertidaksamaan dengan tiga variabel pokok dan empat variabel pokok dikonversi ke bentuk yang ekuivalen atau ke bentuk baku, dilakukan seperti pengerjaan pada pertidaksamaan dengan dua variabel pokok. Misalnya.
   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \leq b_1$ dikonversi menjadi:
   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + s_1 = b_1$
   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \geq b_2$ dikonversi menjadi:
   $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 - y_1 + r_1 = b_1$
   $x_1 \geq 0$ ; $x_2 \geq 0$ ; $x_3 \geq 0$; $y_1 \geq 0$, $r_1 \geq 0$; r adalah variabel artifisal.
4. Variabel nol adalah variabel penyelesaian suatu pertidaksamaan yang diberikan nilai nol karena syarat variabel bernilai nonnegatif tidak dipenuhi.
5. Variabel non-eksternal adalah variabel sistem pertidaksamaan yang juga dapat berfungsi sebagai variabel bebas termasuk pertidaksamaan yang redundan atau berlebih.

## TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1)




Perhatikan gambar di atas jika A(40,0); B(80,0); C $\left(0, \frac{480}{11}\right)$ dan D (0,80). Koordinat P adalah ....

A. (20,35)
B. (25,30)
C. (30,25)
D. (35,40)

2) Koordinat titik sudut dalam daerah penyelesaian:
$2x + 5y \leq 100$
$5x + 2y \leq 100$
$x \geq 0; y \geq 0$
adalah titik pada alternatif jawab, *kecuali* ….

A. (50,0)
B. (0,20)
C. $\left(\frac{100}{7}, \frac{100}{7}\right)$
D. (20,0)

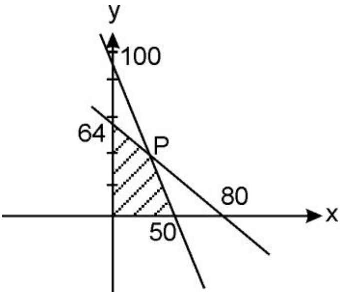
3) Nilai maksimum T = 2x + 3y yang dipenuhi oleh (x,y) pada daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan:

$6x + 11y \leq 480$
$2x + y \leq 80$
$x \geq 0; y \geq 0$ adalah ….

A. 80
B. 120

C. 140
D. 160

4) Lihatlah gambar di bawah. Nilai T = 5x + 4y yang dicapai di (x, y) pada titik P adalah ….




A. 250
B. 256
C. 310
D. 320

5) Diketahui $8x + 5y \geq 40$
$x + 2y \geq 8$ (*)
$x \geq 0$ ; $y \geq 0$
Pasangan berurutan yang tidak terdapat dalam daerah layak hasil sistem pertidaksamaan (*) adalah ....
A. (8,0)
B. (0,8)
C. (7,3)
D. (3,3)

6) Diketahui $3x + 5y + 6z \leq 30$
$6x + 3y + 2z \leq 30$
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \geq 0$
Tripel (x,y,z) pada alternatif jawab terdapat dalam daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan, *kecuali* ….
A. (5, 0, 0)
B. (2, 4, 0)
C. (4, 0, 3)
D. (3, 2, 2)

7) Diberikan sistem pertidaksamaan:
$3x + 5y + 6z \leq 30$
$6x + 3y + 2z \leq 30$
x, y, dan z nonnegatif. Nilai maksimum $T = 4x + 3y + 3z$ adalah ....
A. 20
B. 22
C. 24,2y
D. 25

8) Diberikan sistem pertidaksamaan:
$x + y \geq 20$
$x + 3y \geq 30$
$3x + y \geq 30$
$x \geq 0 ; y \geq 0$
Pasangan berurutan (x,y) yang **tidak** terdapat pada daerah penyelesaian adalah ….
A. (30,0)
B. (15,5)
C. (5,15)
D. (0,20)

9) Diberikan sistem pertidaksamaan:
$x + 2y + 3z + 4u \leq 7$
$2x + y + 3z + 2u \leq 3$ (**)
$x \geq 0 ; y \geq 0; z \geq 0 ; u \geq 0$
Dengan substitusi $w \geq 0$ ; $t \geq 0$ diperoleh bentuk baku dari sistem pertidaksamaan (**).Pasangan variabel dasar manakah yang nilainya tak tentu?
a. x, w
b. x, z
c. y, u
d. z, u

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

# Kunci Jawaban Tes Formatif

*Tes Formatif 1*

1) C. Terdapat satu matriks 2 × 2 partisi matriks $A_B$ dan determinan matriks itu tidak sama dengan nol.
2) C. Ada determinan matriks 3 × 3 yang tidak sama dengan nol. Terdapat tiga vektor kolom dari $A_B$ yang bebas linear atau dimensi $A_B = 3$.
3) B Banyaknya penyelesaian dasar layak ada 10, tapi terdapat satu sistem persamaan di antaranya tidak konsisten sehingga terdapat sembilan penyelesaian dasar layak.
4) B. Substitusi $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_2 = 1$ dan $x_3 = 3$, kemudian cari nilai a setelah substitusi.
5) C. Lakukan operasi menurut baris pertama.
6) A. Elemen kofaktor dari $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ det (minor $a_{ij}$), berarti

$$a_{43} = (-1)^{4+3}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 11 \\ 1 & -3 & 3 \end{vmatrix}.$$

7) D. Matriks kofaktor dari $A_{nxn}$ diperoleh melalui elemen-elemen kofaktor
   $K_{ij} = (-1)^{i+j} . M_{ij}$
8) A. Cari minor tiap unsur matriks A ingat.
9) B. det (A) = -1, cari matriks kofaktor dan adjoint.

$$A^{-1} = \frac{\text{adj(A)}}{\det(A)}$$ ; Adj(A) adalah transpos matriks Kofaktor.

10) C. Semua sistem persamaan konsisten.

*Tes Formatif 2*

1) B. Persamaan garis $\overline{AD}$ dan $\overline{BC}$ adalah $2x + y = 80$ dan $6x + 11y = 480$. Carilah penyelesaian sistem persamaan.
2) A. Gunakanlah grafik garis dan arsirlah daerah hasil layak. Periksa pasangan berurutan (50,0), terletak pada $2x + 5y = 100$ tetapi di luar daerah penyelesaian sistem pertidaksamaan.
3) C. Periksa titik-titik kritis (titik sudut) pada daerah hasil layak. P(25,30) memberi T = 140.

4) C. Carilah persamaan garis AB; didapat 2x + y = 100. Carilah persamaan garis CD; didapat 4x + 5y = 320. P merupakan titik potong AB dan CD didapat P(30,40) memberi hasil T = 310.
5) D. Gambarkan daerah penyelesaian dengan bantuan grafik garis 8x + 5y = 40 dan x + 2y = 8.
6) D. Gambar bidang I melalui (10,0,0); (0,6,0) dan (0,0,5) Gambar bidang II melalui (5,0,0); (0,10,0) dan (0,0,15) dan dengan arsir daerah akan diketahui titik dalam daerah hasil layak.
7) D. Analog dengan cara pada nomor 6. Substitusikan koordinat titik dalam daerah layak hasil adalah (5, 0, 0), (0, 6, 0), (4, 0, 3) dan $\left(\frac{20}{7}, \frac{30}{7}, 0\right)$. Substitusikan ke T = 4x + 3y + 3z.
8) D. Proses kerja seperti soal nomor 5).
9) C. Rank matriks koefisien pada sistem pertidaksamaan bentuk baku adalah dua, tetapi matriks kolom variabel dasar (*basic*) y dan u nilai det ($A_k$) = 0.

# Glosarium

1. Penyelesaian dasar (*basic solution*) persamaan simultan Ax = b, A matriks berdimensi m × n dengan m < n adalah penyelesaian yang dipilih di antara tak terbatasnya penyelesaian Ax = b. Banyaknya penyelesaian dasar Ax = b maksimal m jika rank A adalah rank penuh. Penyelesaian dasar ditentukan dengan memberikan nilai nol pada variabel non-basic yang banyaknya n – m sementara m variabel dasar ditentukan melalui penerapan konsep matriks invers dan operasi baris elementer.

2. Program Linear adalah suatu model optimasi atas fungsi linear f(x1,x2,..., xn) sebagai fungsi tujuan di mana x1,x2,..., xn sebagai luaran (output) yang nonnegatif, berdasarkan masukan (input) yang terbatas dan disebarkan secara proporsional pada tiap variabel luaran yang disajikan dalam bentuk sistem pertidaksamaan linear.

3. Rank Matriks A berdimensi m × n, m < n adalah dimensi ruang baris dan ruang kolom yang dibentuk oleh baris-baris dan kolom-kolom matriks A.

4. Rank penuh dari Matriks A berdimensi m × n, m ≤ n adalah m. Rank Matriks Identitas In adalah rank penuh.

5. Sistem pertidaksamaan linear dalam bentuk baku Ax = b di mana matriks A berdimensi m × n, m < n dengan variabel penambah yang dimasukkan di ruas kiri sebanyak n – m.

# Daftar Pustaka


Bazaraa S Mokhtar. (1987). *Linear Programming and Network Flows*. New York-Toronto-London- Sidney: John Wiley & Sons.

Bunday D Brian. (1984). *Basic Linear Programming*. Baltimore: Arnold.

Frederick S. Hillier, Lieberman Gerald J. (1994). *Introduction To Operations Research* (*Pengantar Riset Operasi*). Alih Bahasa: Gunawan Elen, Mulia Ardi Wiria. Jakarta: Erlangga.

Hohn Franz E. (1990). *Elementary Matrix Algebra*. New York: The Macmillan Company.

Howard Anton, (Pantur Silaban). (1998). *Aljabar Linear Elementer*. Jakarta: Erlangga.

Luenberger David G. (1989). *Linear and NonLinear Programming*. Second Edition. Massachusetts: Addison-Wesley Publishing Company.

Nasendi B & A. Affendi. (1985). *Program Linear*. Jakarta: Gramedia.

Siagian P. (1987). *Penelitian Operasional*. Jakarta: UI-PRESS.

Supranto J. (1984). *Linear Programming*. Jakarta: LPFE-UNI.

Taha A. Hamdy (1993). *Operations Research*. New York: Macmillan Publishing Company.

Wainright Martin E. (1969). *Linear Programming*. USA: Richard D Irvin.

Walsh G.R. (1985). *Linear Programming*. New York - Brisbane - Toronto Singapore: John Willey & Sons.

Winston Wayne L. (1993). *Operations Research*. Duxbury Press: Belmont. California.