Hakikat Matematika

Prof. Dr. Wahyudin, M.Si.

PENDAHULUAN

Matematika dalam perkembangannya sampai pada tingkatan tertentu memiliki keterkaitan dengan filsafat, logika, dan sains. Namun demikian, rentang luas dan spesifikasi matematika yang ada saat ini telah menjadikan definisi matematika secara pasti tidak dapat dipertahankan. Untuk memperoleh selintas gambaran tentang hakikat matematika dengan beragam aspeknya, sebagai pembuka modul Hakikat dan Sejarah Matematika ini, mari kita simak sejumlah pernyataan tentang matematika dari beberapa tokoh dan matematikawan dalam sejarah sebagai berikut:

> Bilangan mengatur alam semesta. —Kaum Pythagorean
>
> Matematika adalah Ratu dari Sains, dan Aritmetik adalah Ratu dari Matematika. —C. F. Gauss.
>
> Aturan yang baik kita terapkan bahwa, saat seorang penulis matematika atau filsafat menulis dengan gagasan yang samar, maka ia sedang berbicara omong kosong. —A. N. Whitehead (1911)
>
> Bagaimana bisa bahwa matematika, sama sekali merupakan hasil dari pikiran manusia yang lepas dari pengalaman, sedemikian beradaptasi dengan objek-objek realitas? —Albert Einstein (1920)
>
> Matematika adalah sains yang paling pasti, dan konklusi-konklusinya memberi ruang bagi bukti absolut. Tetapi ini terjadi demikian hanya karena matematika tidak berupaya untuk menarik konklusi-konklusi yang absolut. Semua kebenaran matematis bersifat relatif, kondisional. —Steinmetz (1923)
>
> Matematika adalah bidang studi di dalam mana kita tidak tahu apa yang sedang kita bicarakan. —Bertrand Russell

Dari pernyataan-pernyataan di atas tersiratkan keperluan bahwa untuk memahami hakikat matematika diperlukan pemahaman tentang sifat-sifat dari matematika. Di dalam modul ini, kita lebih dahulu akan membahas topik sifat kemestian dan pengetahuan *apriori* dalam matematika, objek dan objektivitas dalam matematika, serta hubungan antara matematika dan bidang-bidang sains. Selanjutnya, dalam modul ini dibahas pula tentang sifat khas dari pengetahuan matematis, pada khususnya sifat aksiomatis dari matematika. Akhirnya, modul ini menyajikan suatu perspektif historis ringkas tentang matematika yang memberikan gambaran sekilas hakikat matematika dipandang dari perkembangannya dalam sejarah serta refleksinya ke masa depan.

Setelah menyelesaikan modul ini, diharapkan Anda dapat:

1. menjelaskan sifat kemestian dan pengetahuan *a priori* dalam matematika;
2. menjelaskan tentang objek dan objektivitas dalam matematika;
3. menjelaskan hubungan antara matematika dan sains;
4. menjelaskan sifat aksiomatis dari matematika;
5. menjelaskan nilai penting istilah yang tidak didefinisikan dalam matematika;
6. menjelaskan suatu perspektif pemaknaan terhadap teorema, teori, dan konsep dalam matematika;
7. menjelaskan suatu perspektif tentang sejarah matematika.

KEGIATAN BELAJAR 1

Kemestian, Pengetahuan *a priori*, Objek dan Objektivitas dalam Matematika, serta Hubungan antara Matematika dan Sains

A. KEMESTIAN DAN PENGETAHUAN *A PRIORI*

Tinjauan perkembangan peradaban manusia terutama dalam bidang-bidang sains menunjukkan bahwa matematika terlibatkan dalam banyak upaya umat manusia untuk memperoleh pengetahuan. Ini menunjukkan bahwa matematika, seperti juga sains, adalah bidang yang mengupayakan pemerolehan pengetahuan. Namun demikian, pernyataan-pernyataan matematis dasar tidak tampak memiliki sifat kemungkinan seperti pernyataan-pernyataan dalam sains. Misalnya, berdasarkan intuisi, tidak mesti terdapat delapan planet dalam tata surya kita, dan gravitasi tidak mesti mematuhi hukum kuadrat kebalikan. Di sisi lain, pernyataan-pernyataan matematis seperti 3 + 6 = 9 seringkali dipandang sebagai paradigma kebenaran yang bersifat *mesti*, sehingga kita *tidak* bisa katakan itu salah.

Para ilmuwan sains mengakui bahwa tesis-tesis fundamental mereka *mungkin* saja salah. Kerendahan hati ini didasari oleh sejarah revolusi-revolusi sains, di mana anggapan-anggapan yang telah lama dianut secara mendalam ternyata pada akhirnya ditolak. Apakah kerendahan hati seperti demikian dapat berlaku bagi matematika? Dapatkah kita ragukan bahwa prinsip induksi berlaku untuk bilangan asli? Dapatkah kita ragukan bahwa 3 + 6 = 9? Apakah pernah terjadi revolusi-revolusi dalam matematika sehingga anggapan-anggapan yang telah lama dianut akhirnya ditolak? Sebaliknya, metodologi matematis tidak tampak probabilistik seperti metodologi dalam sains. Tidak seperti sains, matematika berkembang melalui *bukti*. Suatu bukti yang benar dapat mengeliminasi seluruh keraguan rasional, tidak hanya semua keraguan yang masuk akal. Suatu demonstrasi atau bukti matematis harus menunjukkan bahwa premis-premisnya secara logis menyimpulkan konklusinya. Tidaklah mungkin premis-premisnya benar sedangkan konklusinya salah.

Pada setiap kasus, kebanyakan cendikiawan setuju bahwa pernyataan-pernyataan matematis dasar memiliki tingkat kepastian tinggi. Lebih mutlaknya, bagaimana mungkin pernyataan-pernyataan matematis dasar salah? Bagaimana mungkin semua itu diragukan oleh mahluk yang berpikir, kecuali penganut skeptis yang memandang bahwa segala sesuatu seharusnya diragukan? Matematika tampak bersifat esensial bagi tiap jenis penalaran. Jika, misalnya, sebagai bagian dari suatu eksperimen berpikir filosofis, kita meragukan matematika dasar, maka bagaimana kemudian hendaknya kita berpikir?

Frasa "a priori" kurang lebih berarti "sebelum pengalaman" atau "tidak terikat oleh pengalaman." Suatu pernyataan didefinisikan sebagai diketahui *a priori* jika pengetahuan itu tidak didasarkan pada sebarang "pengalaman atas serangkaian khusus kejadian di dunia nyata" (Blackburn, 1994: 21). Contoh-contoh paling khas dari pernyataan semacam ini barangkali adalah pernyataan-pernyataan dalam logika dan matematika. Di sisi lain, suatu pernyataan diketahui "a posteriori" atau "secara empiris" jika ia tidak diketahui secara a priori. Suatu pernyataan yang benar adalah a priori jika ia dapat diketahui secara a priori, dan suatu pernyataan yang benar adalah a posteriori jika ia tidak dapat diketahui secara a priori—jika pengalaman dengan dunia (di luar apa yang diperlukan untuk menangkap konsep-konsep itu) diperlukan untuk mengetahui pernyataan tersebut.

Untuk memahami hakikat matematika dan mengikuti sejarahnya, tampaknya kita memang perlu membahas sifat kemestian dan *a prioritas* dari matematika, untuk selanjutnya memahami bagaimana gagasan-gagasan itu berlaku pada matematika. Namun demikian terdapat tensi penting dalam pandangan yang dianggap sebagai "rute tradisional" di atas. Matematika bersifat esensial bagi pendekatan sains terhadap dunia, dan sains bersifat empirik, terlepas dari pengaruh-pengaruh rasionalisme. Jadi, bagaimana pengetahuan a priori tentang kebenaran-kebenaran yang bersifat mesti ternyata menjadi bagian penting dalam pengumpulan pengetahuan yang bersifat empirik?

Di sisi lain, terdapat sebuah alternatif pandangan, yang seringkali disebut pandangan non-tradisional. Beberapa empiris mengemukakan bahwa prinsip-prinsip matematis tidak bersifat mesti atau diketahui a priori, barangkali karena selayaknya tidak ada pernyataan mana pun mendapatkan posisi yang istimewa seperti itu. Namun demikian, sebagai konsekuensinya, para penganut pandangan ini memikul beban pertanyaan mengapa tampak bahwa matematika adalah mesti dan a priori. Kita tidak dapat mengabaikan begitu saja anggapan yang telah sedemikian lama bertahan tentang status istimewa dari matematika. Maksudnya, seandainya pun anggapan-anggapan tradisional tentang matematika keliru, tetapi tentu ada sesuatu tentang matematika yang telah membuat sedemikian banyak orang yakin bahwa ia bersifat mesti dan dapat diketahui secara a priori.

B. OBJEK DAN OBJEKTIVITAS DALAM MATEMATIKA

Saat kita mengkaji hakikat matematika, kita dihadapkan pada beraneka ragam perkara. Misalnya, tentang apakah matematika itu? Bagaimana matematika diperoleh? Bagaimana kita mengetahui matematika? Apakah metodologi dari matematika, dan sejauh mana metodologi itu reliabel? Apakah arti dari pernyataan-pernyataan matematis? Apakah kita memiliki konsepsi yang tetap dan tidak ambigu tentang konsep-konsep dan ide-ide matematis yang pokok? Apakah kebenaran matematis bersifat bivalen, dalam arti bahwa setiap kalimat matematis yang telah tersusun baik dan tidak ambigu adalah tetap benar atau tetap salah? Apakah logika yang tepat bagi matematika? Sejauh mana prinsip-prinsip matematika bersifat objektif dan tidak terikat oleh pikiran, bahasa, dan struktur sosial dari para matematikawan? Apakah setiap kebenaran matematis dapat diketahui? Apakah hubungan antara matematika dan sains yang menjadikan matematika mungkin diaplikasikan dalam sains?

1. Objek

Wacana matematis menunjuk pada jenis-jenis obyek yang istimewa, seperti bilangan, titik, fungsi, dan himpunan. Perhatikan sebuah teorema kuno bahwa untuk setiap bilangan asli n, terdapat suatu bilangan prima $m > n$. Dari sini dapat disimpulkan bahwa tidak terdapat bilangan prima terbesar, sedemikian hingga terdapat bilangan prima dalam jumlah tak hingga. Setidaknya di permukaan, teorema ini tampak berkaitan dengan *bilangan-bilangan*. Namun demikian, apakah semua ini? Apakah kita hendaknya menerima bahasa matematis begitu saja dan menyimpulkan bahwa bilangan, titik, fungsi, dan himpunan memang ada? Jika itu semua ada, apakah mereka lepas dari matematikawan, pikirannya, bahasa, dan sebagainya? Definisikan *realisme dalam ontologi* sebagai pandangan bahwa sekurang-kurangnya beberapa objek matematis ada secara objektif, tidak terikat pada matematikawan.

Realisme dalam ontologi berlawanan dengan pandangan-pandangan seperti *idealisme* dan *nominalisme*. Seorang idealis menerima bahwa objek-objek matematis ada, tetapi objek-objek itu tergantung pada pikiran manusia. Dia menganggap bahwa objek-objek adalah konstruk yang timbul dari aktivitas mental masing-masing matematikawan. Ini suatu idealisme subjektif. Para idealis lain memandang objek-objek matematis sebagai bagian dari susunan mental yang dimiliki seluruh manusia. Ini adalah idealisme intersubjektif. Semua penganut idealisme meyakini kontra-fakta bahwa jika tidak ada pikiran, maka tidak akan ada objek-objek matematis. Para idealis realis ontologis menyangkal kontra-fakta tersebut, menegaskan bahwa objek-objek matematis bersifat lepas atau independen dari pikiran.

Nominalisme adalah suatu sangkalan lebih radikal terhadap eksistensi objektif dari objek-objek matematis. Salah satu versinya berpandangan bahwa objek-objek matematis hanya merupakan konstruksi-konstruksi linguistik. Beberapa nominalis lain menolak pembedaan terkait objek-objek matematis ini, dengan pandangan bahwa bilangan sembilan, misalnya, hanyalah angka "9" (atau sembilan, IX, dsb.). Ini adalah suatu variasi nominalisme lebih tradisional yang terkait dengan apa yang disebut "universal-universal," seperti warna dan bentuk. Saat ini, para skeptik lebih cenderung menyangkal eksistensi objek-objek matematis daripada mengkonstsruksi objek-objek itu dari bahasa. Nihilisme matematis ini disebut juga "nominalisme."

Versi-versi umum dari realisme dalam ontologi menjelaskan *kemestian* dari matematika: Jika bidang kajian dari matematika adalah sebagaimana yang dikatakan para realis, maka kebenaran-kebenaran matematika tidak terikat oleh apa pun yang mungkin tentang semesta fisik dan apa pun yang mungkin tentang pikiran manusia, komunitas para matematikawan, dan sebagainya. Bagaimana tentang pengetahuan a priori? Keterkaitan dengan Plato menyiratkan eksistensi keterhubungan kuasi-mistis antara manusia dengan realm matematis yang abstrak dan terpisah. Kemampuan ini, kadang disebut "intuisi matematis", dianggap menuju ke pengetahuan pernyataan-pernyataan matematis dasar, misalnya aksioma-aksioma dari beragam teori. Namun demikian, intuisi matematis ini ditolak oleh penganut naturalisme yang berpandangan bahwa sebarang kemampuan epistemik harus tunduk kepada kajian ilmiah yang lazim dalam sains. Dengan penolakan terhadap hubungan kuasi-mistis, seorang realis ontologis tersudutkan oleh misteri epistemik yang dalam.

Jika objek matematis adalah bagian dari suatu realm matematis yang bersifat lepas, abadi, dan akausal, maka bagaimana mungkin manusia memperoleh pengetahuan tentang objek-objek tersebut? Jika ada seorang realis yang juga nominalis, maka tantangan baginya adalah menunjukkan bagaimana mahluk fisik di semesta fisik dapat mengetahui tentang objek-objek abstrak seperti bilangan, titik, dan himpunan.

Di sisi lain, hadir pandangan-pandangan dari anti-realisme. Jika bilangan, misalnya, adalah kreasi dari berpikir manusia dan inheren dalam pikiran manusia, seperti dikemukakan oleh para idealis, maka pengetahuan matematis dari beberapa segi merupakan pengetahuan tentang pikiran kita sendiri. Matematika bersifat a priori sepanjang bahwa pengetahuan tentang diri sendiri ini bersifat independen dari pengalaman inderawi. Serupa demikian, kebenaran matematis akan bersifat mesti sepanjang bahwa struktur pikiran manusia juga bersifat mesti. Pada pandangan-pandangan seperti ini, persoalannya adalah menyelesaikan gambaran yang dianggapkan tentang objek-objek matematis dengan realm utuh matematika sebagaimana ia dipraktikkan.

Jika objek-objek dikonstruksi dari item-item linguistik, maka pengetahuan matematis adalah pengetahuan bahasa. Tidaklah jelas apa jadinya tesis-tesis bahwa kebenaran matematis bersifat mesti dan diketahui a priori. Itu akan bergantung pada pandangan-pandangan nominalisme tentang bahasa. Pengetahuan matematis akan a priori diketahui sepanjang bahwa pengetahuan kita tentang bahasa adalah a priori. Sekali lagi, masalah utamanya adalah menyelaraskan pandangan itu dengan cakupan utuh matematika. Akhirnya, jika tidak terdapat objek-objek matematis, seperti beberapa nominalis katakan, maka pernyataan-pernyataan matematis hendaknya ditafsirkan tanpa melibatkan referensi ke objek-objek matematis, atau, alternatifnya, seorang nominalis harus memandang bahwa pernyataan-pernyataan matematis salah secara sistematis (dan, dengan begitu, tidak mesti) atau kosong. Sama halnya, seorang nominalis harus menafsirkan pengetahuan matematis dalam kaitan selain pengetahuan objek-objek matematis, atau jika tidak demikian, mengargumentasikan bahwa sama sekali tidak ada pengetahuan matematis (sehingga tidak ada pengetahuan matematis a priori).

2. Kebenaran

Untuk memahami hakikat matematika, kita pun hendaknya mencermati *bahasa* dari matematika. Apakah arti dari pernyataan-pernyataan matematis? Apakah bentuk logis dari pernyataan-pernyataan itu? Apakah semantik terbaik untuk bahasa matematis? George Kreisel seringkali dipandang sebagai pelopor pergeseran fokus dari eksistensi objek-objek matematis ke *objektivitas* dalam wacana matematis. Selanjutnya, definisikan *realisme dalam nilai kebenaran* sebagai pandangan bahwa pernyataan-pernyataan matematis memiliki nilai-nilai kebenaran objektif yang lepas dari pikiran, bahasa, konvensi, dan sebagainya dari para matematikawan.

Oposisi dari pandangan di atas adalah *anti*-realisme *dalam nilai kebenaran*, suatu tesis bahwa jika pernyataan-pernyataan matematis memang memiliki nilai-nilai kebenaran, maka nilai-nilai kebenaran itu terikat pada matematikawan. Sebuah versi anti-realisme nilai kebenaran yaitu bahwa pernyataan-pernyataan yang tidak ambigu memperoleh nilai-nilai kebenaran berdasarkan pikiran manusia atau berdasarkan aktivitas mental manusia yang sebenarnya atau yang mungkin. Pada pandangan ini, kita menjadikan beberapa pernyataan sebagai benar atau salah, dalam arti bahwa struktur pikiran manusia bagaimanapun mengatur kebenaran matematis. Ini adalah suatu idealisme dalam nilai kebenaran. Namun demikian, pandangan ini tidak menyimpulkan bahwa kita *memutuskan* apakah suatu pernyataan tertentu sebagai benar atau salah.

Bagian dari apa yang menjadikan pernyataan-pernyataan matematis itu objektif adalah kemungkinan bahwa kebenaran dari beberapa pernyataan berada di luar kemampuan manusia untuk mengetahuinya. Artinya, para realis dalam nilai kebenaran menerima kemungkinan adanya kebenaran matematis yang tidak dapat diketahui. Berdasarkan pandangan ini, kebenaran adalah satu hal, dan ke-dapat-diketahui-an adalah satu hal lainnya. Di sisi lain, seorang anti-realis nilai kebenaran berpandangan bahwa semua kebenaran matematis dapat diketahui. Jika, dalam satu segi, pernyataan-pernyataan matematis mendapatkan nilai-nilai kebenaran berdasarkan pikiran, maka akan masuk akal untuk diyakini bahwa tidak ada kebenaran matematis yang berada di luar kemampuan manusia untuk mengetahuinya: untuk sebarang pernyataan matematis Φ, jika Φ benar maka, pada prinsipnya, Φ dapat diketahui.

Terdapat pula perbedaan pandangan dalam segi semantik. Seorang realis dalam nilai kebenaran memandang bahwa bahasa matematis bersifat *bivalen*, dalam arti bahwa tiap pernyataan yang tidak ambigu adalah tetap benar atau tetap salah. Namun demikian, banyak anti-realis yang meragukan bivalensi, mengargumentasikan bahwa pikiran dan/atau dunia tidak mungkin menentukan, dari setiap pernyataan matematis yang tidak ambigu, apakah pernyataan itu benar atau salah. Beberapa anti-realis berpandangan bahwa logika klasik harus digantikan oleh logika intuisionistik, yang selanjutnya mengarah kepada tuntutan revisi-revisi dalam matematika yang didasarkan pada filsafat.

Suatu versi anti-realisme dalam nilai kebenaran yang lebih radikal memandang bahwa pernyataan-pernyataan matematis sama sekali tidak memiliki nilai kebenaran (yang bersifat tidak trivial, tidak kosong). Dengan demikian, tidak pula terdapat pengetahuan matematis, sepanjang kita setuju bahwa “Φ diketahui” menyimpulkan “Φ adalah benar.” Jika seorang anti-realis yang menganut pandangan demikian tidak ingin menimbulkan kekeliruan dan kebingungan besar dalam keseluruhan komunitas matematika dan sains, maka dia harus menjelaskan apa yang dipandang sebagai pengetahuan matematis.

Terdapat suatu aliansi yang kuat antara realisme dalam nilai kebenaran dan realisme dalam ontologi. Seorang realis nilai kebenaran lebih lanjut menyatakan bahwa beberapa pernyataan adalah benar secara objektif—independen dari para matematikawan. Tesis *ontologis* bahwa bilangan-bilangan ada secara objektif mungkin tidak ditarik secara langsung dari tesis semantik realisme nilai kebenaran. Barangkali terdapat kebenaran-kebenaran objektif tentang entitas-entitas yang tidak terikat pada pikiran. Namun demikian, eksistensi objektif dari objek-objek matematis sekurang-kurangnya diisyaratkan oleh kebenaran objektif dari pernyataan-pernyataan matematis. Perspektif ini mengikhtisarkan sebagian dari dilema yang diajukan dalam artikel “*Mathematical Truth*” oleh Paul Benacerraf (1973), sebuah tulisan yang terus mendominasi diskusi masa kini dalam filsafat matematika.

C. HUBUNGAN ANTARA MATEMATIKA DAN SAINS

Matematika dalam beragam bentuknya sangat penting bagi dunia dewasa ini (meski ini mungkin tidak tampak dengan jelas bagi sebagian pihak luar). Terlepas dari otonomi dasarnya, upaya pengembangan matematika lanjut pada dua dekade terakhir telah terkait erat dengan kemajuan berbagai bidang sains. Ini tampak dengan memperhatikan aplikabilitas dari beragam area matematika, selain sejarah matematika dan pendidikan matematika.

Misalnya, teori peluang dan statistika matematis, fisika matematis, metode numerik dan perhitungan, aspek-aspek matematis sains komputer, aplikasi-aplikasi matematika pada sains-sains non-fisika berkaitan erat dengan beraneka ragam bidang sains dan teknologi. Selain itu, terdapat bidang-bidang matematis yang berkaitan langsung dengan praktik pada teori dan praktik dalam sains-sains alam, misalnya geometri, topologi, geometri aljabar, analisis kompleks, grup Lie dan representasinya, analisis real dan analisis fungsi, persamaan turunan parsial, serta persamaan turunan biasa dan sistem dinamis. Akhirnya, logika dan fondasi-fondasi matematis, aljabar, teori bilangan, serta matematika diskrit dan kombinatorik, semuanya memiliki hubungan sangat penting dengan sains komputer.

Namun demikian, interaksi-interaksi antara matematika dan sains bersifat ekstensif, jauh lebih dari sekedar beberapa cabang yang kadang-kadang disebut "matematika terapan." Jalan-jalan yang kaya dan beraneka ragam saling menghubungkan matematika dan sains. Sebagaimana dikatakan oleh Nicolas Goodman (1979: 550), "sebagian besar cabang matematika secara sangat langsung menerangi bagian dari alam. Geometri terkait dengan ruang. Teori peluang mengajari kita tentang proses-proses acak. Teori grup menjelaskan simetri. Logika mendeskripsikan inferensi rasional. Banyak bagian dari analisis diciptakan untuk mempelajari proses-proses tertentu dan masih mutlak diperlukan untuk studi proses-proses tersebut. Ini adalah suatu realitas praktis bahwa teorema-teorema terbaik kita memberikan keterangan tentang dunia konkret."

Berdasarkan hal di atas, kita melihat adanya hubungan antara matematika dan wacana lain termasuk wacana sains dan wacana biasa. Dengan memperhatikan interaksi-interaksi intensif ini, kita dapat mulai dengan hipotesis bahwa terdapat hubungan antara bidang kajian matematika (apa pun itu) dan bidang kajian sains (apa pun itu), dan bahwa bukanlah suatu kebetulan bahwa matematika berlaku pada realitas materi.

Terdapat indikasi bahwa sebagian besar kerja teoretis dan praktis dalam sains adalah mengkonstruksi dan mengungkap model-model matematis bagi fenomena fisika. Banyak persoalan dalam bidang sains dan teknik merupakan tugas-tugas untuk menemukan persamaan turunan, rumus, atau fungsi yang berkaitan dengan suatu kelas fenomena. "Penjelasan" dari suatu peristiwa fisika seringkali menjadi tidak lebih dari suatu deskripsi matematis tentangnya. Namun, apakah yang dimaksud dengan deskripsi matematis dari peristiwa fisika? Jelaslah, suatu struktur, deskripsi, model, atau teori matematis tidak dapat berperan sebagai penjelasan bagi peristiwa non-matematis tanpa suatu penjelasan tentang hubungan antara matematika itu sendiri dan realitas dalam sains. Tanpa adanya penjelasan semacam itu, bagaimana penjelasan-penjelasan dalam matematika/sains dapat meniadakan setiap kekaburan—terutama jika ketidakjelasan baru yang lebih menyulitkan dikemukakan.

Kita sedikitnya memiliki dua pertanyaan: Bagaimana matematika diterapkan dalam penjelasan dan deskripsi sains? Apakah penjelasan (filosofis) untuk aplikabilitas matematika pada sains? Kita menerapkan konsep-konsep matematis—misalnya, bilangan, fungsi, integral, ruang Hilbert—dalam mendeskripsikan fenomena non-matematis. Kita pun menerapkan *teorema-teorema* matematika dalam menentukan fakta-fakta tentang dunia dan bagaimana dia bekerja.

Mark Steiner (1995) menggolongkan masalah-masalah filosofis yang masuk ke dalam rubrik "menerapkan matematika." Salah satu kelompok masalah itu terkait dengan masalah *semantik*. Persoalannya adalah menemukan suatu interpretasi bahasa yang meliputi konteks-konteks "murni" dan "campuran," sedemikian hingga bukti-bukti dalam matematika dapat digunakan secara langsung dalam konteks-konteks sains. Kelompok masalah yang kedua bersifat *metafisik*. Bagaimana objek-objek matematis (jika ada) berelasi dengan dunia fisik, sedemikian hingga aplikasi-aplikasi menjadi mungkin? Pada sudut pandang realisme ontologis yang lazim, misalnya, matematika adalah tentang suatu realm objek-objek abstrak yang lembam secara kausal. Pada pandangan idealisme yang lazim, matematika adalah tentang aktivitas mental. Pada kedua kasus tersebut, bagaimana hal-hal seperti itu memberitahu kita tentang bagaimana dunia fisik bekerja? Kelompok ketiga terkait dengan perkara mengapa konsep-konsep dan formalisme-formalisme tertentu dari matematika seringkali berguna dalam mendeskripsikan realitas empirik. Apakah tentang dunia fisik yang menjadikan aritmetik sedemikian *aplikabel*? Apakah tentang dunia fisik yang menjadikan teori grup dan ruang-ruang Hilbert sedemikian sentral dalam mendeskripsikannya? Steiner menyebutkan bahwa kita sungguh memiliki masalah yang berbeda untuk tiap konsep terapan, sehingga kita sebaiknya tidak mengharapkan solusi yang seragam.

Masalah-masalah itu terjadi pada beberapa tingkatan. Pertama, seseorang mungkin bertanya bagaimana suatu fakta matematis *tertentu* dapat berperan sebagai penjelasan bagi peristiwa non-matematis tertentu. Bagaimana suatu fakta matematis menjadikan suatu peristiwa fisika terpahami? Pada kasus ini, jawaban yang memadai memuat suatu deskripsi terperinci tentang *teori* sains yang relevan yang mengaitkan suatu kelas fungsi-fungsi tertentu dengan suatu kelas fenomena fisika tertentu.

Ludwig Wittgenstein menuliskan bahwa semua penjelasan pastilah "habis" pada suatu titik, di mana keingintahuan kita terpenuhi atau kita menyadari bahwa kita harus berhenti bertanya lebih jauh, tetapi barangkali kita belum mencapai titik tersebut. Kita mungkin bertanya-tanya apakah hubungan antara suatu kelas objek-objek matematis, misalnya fungsi-fungsi bernilai real, dengan fenomena fisik. Ini membawa kajian kita ke tingkatan lainnya. Kita sekarang mempertanyakan relevansi suatu teori matematis/sains tertentu secara keseluruhan. Mengapa teori itu bekerja? Salah satu jawaban yang mungkin adalah dengan menyebutkan bahwa penggunaan-pengunaan matematika yang serupa berperan penting dalam metodologi sains. Jika pertanyaan berlanjut, kita dapat mengemukakan keberhasilan metodologi ini dalam memprediksi dan mengontrol dunia. Tetapi, jika kita belum mencapai titik habis dari Wittgenstein tadi, maka terdapat tingkatan ketiga dalam kajian ini. Bagaimana tentang keseluruhan upaya matematika/sains, atau sedikitnya tentang bagian-bagian "matematis" dari upaya itu? Mengapa matematika esensial bagi sains? Apakah perannya? Penjelasan tentang ini merupakan bidang sah dari filsafat.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Matematika terlibatkan dalam banyak upaya manusia untuk memperoleh pengetahuan. Jelaskan tentang sifat kebenaran dari pengetahuan matematis. Berikan contohnya!
2) Pengetahuan ilmu sains diakui bersifat "kemungkinan," "kebetulan," atau "*contingent*". Apakah maksud dari pernyataan tersebut? Jelaskan dengan contoh dari sejarah sains.

3) Apakah yang unik dalam metodologi pemerolehan pengetahuan matematis sehingga ia tidak bersifat probabilitistik seperti metodologi dalam sains? Jelaskan.
4) Bagaimanakah jadinya seandainya matematika ternyata salah? Jelaskan jawaban Anda dengan mengaitkan matematika dengan proses berpikir manusia.
5) Jelaskan makna dari suatu pernyataan yang "diketahui a priori" dan pernyataan yang diketahui "*a posteriori*."
6) Wacana matematis menyebutkan jenis-jenis obyek istimewa, misalnya bilangan, titik, fungsi, dan himpunan. Jelaskan bagaimana penganut masing-masing aliran berikut ini memandang eksistensi objek-objek matematis:
7) Realisme dalam ontologi b) idealisme subjektif dan inter-subjektif.
8) Jelaskan bagaimana penganut aliran nominalisme memandang eksistensi objek-objek matematis!
9) Jelaskan pandangan realisme dalam ontologi tentang kemestian matematika!
10) Jelaskan perbedaan antara realisme dan anti-realisme dalam nilai kebenaran!
11) Jelaskan hubungan antara matematika dan sains menurut Goodman (1979).

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Sifat kebenaran dari pengetahuan matematis adalah mesti. Misalnya, 4 + 5 = 9, dan hasil-hasil dari operasi-operasi hitung lainnya yang dilakukan dengan benar, kita tidak bisa katakan itu salah.
2) Para ilmuwan sains mengakui bahwa tesis-tesis fundamental mereka mungkin saja salah. Kerendahan hati ini didasari oleh sejarah revolusi-revolusi sains, di mana anggapan-anggapan yang telah lama dianut secara mendalam ternyata pada akhirnya ditolak. Misalnya, Bumi adalah pusat dari alam semesta, jumlah planet dalam tata surya kita ada sembilan (kini delapan, setelah status Pluto berubah menjadi planet kerdil).
3) Metodologi matematis tidak tampak probabilistik seperti metodologi dalam sains karena matematika berkembang melalui bukti. Suatu bukti yang benar dapat mengeliminasi seluruh keraguan rasional, tidak hanya

keraguan yang masuk akal. Suatu demonstrasi atau bukti matematis harus menunjukkan bahwa premis-premisnya secara logis menyimpulkan konklusinya.

4) Matematika tampak bersifat esensial bagi tiap jenis penalaran. Jika, misalnya, sebagai bagian dari eksperimen berpikir kita ragukan matematika dasar, maka kemudian muncul pertanyaan bagaimana hendaknya kita berpikir tanpa matematika atau logika matematis.
5) Suatu pernyataan didefinisikan sebagai diketahui a priori jika ia tidak didasarkan pada sebarang “pengalaman atas serangkaian khusus kejadian di dunia nyata” (Blackburn, 1994: 21). Contoh-contoh paling khas dari pernyataan semacam ini adalah pernyataan-pernyataan dalam logika dan matematika. Suatu pernyataan diketahui “a posteriori” atau “secara empiris” jika ia tidak diketahui secara a priori.
6) Berikut ini adalah penjelasan ringkasnya:
   a) Realisme dalam ontologi: Seorang realis ontologis memandang sekurang-kurangnya beberapa objek matematis ada secara objektif, tidak terikat pada matematikawan.
   b) Idealisme: Seorang idealis menerima bahwa objek-objek matematis ada, tetapi objek-objek itu tergantung pada pikiran manusia.
      Idealisme subjektif: Objek matematis adalah konstruk-konstruk yang timbul dari aktivitas mental masing-masing matematikawan.
      Idealisme inter-subjektif: Objek-objek matematis adalah bagian dari susunan mental yang dimiliki oleh seluruh umat manusia.
7) Seorang nominalis menyangkal secara lebih radikal terhadap eksistensi objektif dari objek-objek matematis. Salah satu versinya memandang objek-objek matematis hanya merupakan konstruksi-konstruksi linguistik. Versi nominalisme lebih tradisional yang terkait dengan “universal-universal”, seperti warna dan bentuk, menolak pembedaan terkait objek-objek matematis ini, dengan pandangan bahwa bilangan sembilan, misalnya, hanyalah angka “9” (atau sembilan, IX, dsb.).
8) Realisme dalam ontologi menjelaskan kemestian dari matematika: Jika bidang kajian matematika adalah sebagaimana yang dikatakan oleh para realis (bahwa sekurang-kurangnya beberapa objek matematis ada secara objektif), maka kebenaran-kebenaran matematika tidak terikat oleh apa pun yang mungkin tentang semesta fisik dan apa pun yang mungkin tentang pikiran manusia, komunitas para matematikawan, dan sebagainya.

9) Realisme dalam nilai kebenaran: pernyataan-pernyataan matematis memiliki nilai-nilai kebenaran objektif yang lepas dari pikiran, bahasa, konvensi, dan sebagainya, dari para matematikawan. Anti-realisme dalam nilai kebenaran: Jika pernyataan-pernyataan matematis memang memiliki nilai-nilai kebenaran, maka nilai-nilai kebenaran itu terikat pada para matematikawan.
10) Nicolas Goodman (1979: 550) mengemukakan bahwa sebagian besar cabang matematika sangat langsung menerangi bagian dari alam. Misalnya, geometri terkait dengan ruang, teori peluang membicarakan proses-proses acak, teori grup menjelaskan simetri, logika mendeskripsikan inferensi rasional, dan sebagainya. Lebih lanjut, banyak bagian dari analisis diciptakan untuk mempelajari proses-proses tertentu dan masih mutlak diperlukan untuk studi proses-proses tersebut. Ini merupakan suatu realitas praktis bahwa teorema-teorema terbaik dalam matematika memberikan keterangan tentang dunia konkret.

RANGKUMAN

Matematika terlibatkan dalam banyak sekali upaya umat manusia untuk memperoleh pengetahuan. Interaksi antara matematika dan sains bersifat ekstensif, jauh lebih daripada sekedar beberapa cabang yang kadang-kadang disebut matematika terapan. Sebagian besar cabang matematika secara sangat langsung menerangi bagian dari alam.

Namun demikian, berbeda dari pernyataan-pernyataan dalam sains, pernyataan dalam matematika dipandang memiliki kebenaran yang bersifat mesti, karena matematika berkembang melalui bukti. Matematika sering dipandang sebagai suatu paradigma pengetahuan *a priori*, pengetahuan yang mendahului, dan lepas dari, pengalaman.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Dari pernyataan-pernyataan berikut, manakah yang memiliki kebenaran yang mesti?
   A. 7+ 11 = 18
   B. Suhu di bulan memiliki rentang 100°C - 173°C.
   C. AIDS adalah penyakit yang tidak dapat disembuhkan.
   D. Setiap lukisan Van Gogh beraliran impresionis.

2) Pernyataan-pernyataan berikut ini sampai pada tingkatan tertentu mendukung sifat kebenaran yang mesti dari matematika, *kecuali* ....
   A. Tidak pernah terjadi revolusi dalam matematika yang menyebabkan anggapan-anggapan yang telah lama dianut secara mendalam ternyata pada akhirnya ditolak.
   B. Matematika dikembangkan melalui bukti, dan bukti yang benar dapat mengeliminasi seluruh keraguan rasional, tidak hanya keraguan yang masuk akal.
   C. Matematika adalah ratu dari sains.
   D. Jika matematika ternyata salah, maka muncul masalah besar tentang bagaimana hendaknya manusia berpikir dan melakukan penalaran.

3) Suatu pernyataan yang “diketahui a priori” memiliki ciri-ciri sebagai berikut, *kecuali* ....
   A. tidak terikat oleh pengalaman panca-indera
   B. mendahului pengalaman
   C. diketahui secara empirik
   D. diperoleh melalui deduksi logis

4) Manakah berikut ini pada hakikatnya *bukan* pernyataan yang “diketahui a posteriori”?
   A. Air mendidih pada suhu 100°C.
   B. Pada sebarang segitiga, jumlah dari ketiga sudut dalamnya sama dengan dua sudut siku-siku.
   C. Jika permintaan barang meningkat, maka harga barang pun naik.
   D. Bulan mempengaruhi pasang-surut air di lautan.

5) Perhatikan pernyataan berikut: “Objek matematis adalah bagian dari suatu realm matematis yang bersifat lepas, abadi, dan akausal.”
   Perspektif manakah berikut ini yang menganut pernyataan tersebut?
   A. idealisme
   B. realisme
   C. nominalisme
   D. anti-realisme

6) Penjelasan-penjelasan tentang “intuisi matematis” di bawah ini benar, *kecuali* ....
   A. menghubungkan manusia dengan realm matematis yang abstrak dan terpisah
   B. membimbing manusia kepada pernyataan-pernyataan matematis dasar

C. ditolak oleh penganut naturalisme yang berpandangan bahwa sebarang kemampuan epistemik harus tunduk kepada kajian ilmiah yang lazim dalam sains
D. mengisyaratkan bahwa eksistensi realm matematis terikat pada semesta fisik, pikiran manusia, komunitas para matematikawan, dan sebagainya

7) Misalkan seorang filsuf menerima bahwa objek-objek matematis memang ada tetapi bergantung pada pikiran manusia, dan bahwa pernyataan-pernyataan matematis memiliki nilai-nilai kebenaran yang terikat pada para matematikawan.
Posisi manakah berikut ini yang mencerminkan pandangan filsuf tersebut?
A. “realisme dalam ontologi” dan “realisme dalam nilai kebenaran”
B. “realisme dalam ontologi” dan “anti-realisme dalam nilai kebenaran”
C. “idealisme” dan “realisme dalam nilai kebenaran”
D. “idealisme” dan “anti-realisme dalam nilai kebenaran”

8) Beberapa nominalis menyatakan bahwa objek-objek matematis tidak ada. Konsekuensi dari pandangan tersebut adalah sebagai berikut, *kecuali* ....
A. Pernyataan-pernyataan matematis hendaknya ditafsirkan tanpa melibatkan referensi ke objek-objek matematis.
B. Pengetahuan matematis adalah pengetahuan tentang pikiran kita sendiri.
C. Pernyataan-pernyataan matematis salah secara sistematis dan, dengan begitu, bersifat tidak mesti atau kosong.
D. Seorang nominalis harus mengargumentasikan bahwa pengetahuan matematis sama sekali tidak ada, sedemikian hingga tidak ada pengetahuan matematis a priori.

9) Interaksi antara matematika dan sains bersifat ekstensif, jauh lebih luas daripada hanya beberapa cabang yang kadang-kadang disebut “matematika terapan.” Beberapa gagasan produktif yang bisa diambil dari pernyataan tersebut adalah sebagai berikut, *kecuali* ....
A. Matematika berlaku, artinya memiliki aplikasi-aplikasi, pada realitas materi.
B. Terdapat hubungan antara bidang kajian matematika dan bidang kajian sains.

C. Hubungan sains dan matematika sebaiknya dibatasi pada "matematika terapan" saja.
D. Filsafat matematika harus menjelaskan hubungan matematika dan wacana sains.

10) Mark Steiner (1995) menggolongkan masalah-masalah filosofis yang masuk ke dalam rubrik "menerapkan matematika" ke dalam kelompok-kelompok masalah berikut ini, *kecuali* ....
A. semantik
B. metafisik
C. aplikabilitas
D. realisme versus nominalisme

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sifat Aksiomatis dari Matematika

Berbagai perkara dan pertanyaan yang telah dibahas sebelum ini berkaitan dengan seluruh matematika dan bahkan seluruh sains. Kegiatan belajar ini memberikan gambaran tentang perkara-perkara lebih sempit terkait hakikat matematika dari dalam matematika sendiri. Berikut ini, terlebih dahulu, kita akan membahas sifat aksiomatis dari matematika dan pemerolehan pengetahuan matematis, dengan menggunakan sebuah contoh atau kasus klasik terkait bagian geometri dari *Elements* karya Euclid.

A. SUATU FONDASI DARI EUCLID

Selama lebih dari dua ribu tahun, Euclid telah menjadi duta kehormatan geometri Yunani, terutama berkat karya besarnya yang berjudul *Elements*. Generasi demi generasi memandang karya ini sebagai puncak dan mahkota dari logika, dan mempelajari *Elements* adalah cara terbaik untuk mengembangkan kemampuan penalaran pasti. Namun demikian, pada beberapa ratus tahun terakhir ini *Elements* telah mulai digantikan oleh buku-buku teks modern, yang berbeda darinya dalam segi urutan logis, bukti-bukti proposisi, dan aplikasi-aplikasi, tetapi hanya berbeda sedikit saja dalam kandungan sebenarnya. Di sisi lain, karya Euclid tersebut tetap menjadi model utama bagi buku matematika murni.

Siapa pun yang akrab dengan proses intelektual menyadari bahwa isi dari *Elements* tidak mungkin merupakan hasil kerja dari satu orang saja. Sedikit saja, jika memang ada, teorema-teorema dalam *Elements* yang merupakan temuannya sendiri. Kehebatan Euclid bukan dalam kontribusi materi asli melainkan dalam keahlian luar biasa untuk mengatur berbagai fakta saling lepas yang luas menjadi bahasan definitif geometri Yunani dan teori bilangan. Pilihan khusus aksioma, penyusunan proposisi, dan ketegasan demonstrasi adalah pencapaiannya sendiri. Satu hasil diperoleh dari hasil yang lain dalam urutan logis yang ketat, dengan asumsi-asumsi sesedikit mungkin dan sedikit sekali yang berlebihan.

Euclid sadar bahwa untuk menghindari sirkularitas dan memberikan titik awal, fakta-fakta tertentu tentang sifat dari pokok bahasan harus diasumsikan tanpa bukti. Pernyataan-pernyataan yang diasumsikan secara begitu saja ini, dari mana semua pernyataan lainnya disimpulkan sebagai konsekuensi logis, disebut "aksioma" atau "postulat." Dalam penggunaan tradisional, suatu postulat dipandang sebagai "kebenaran yang terbukti dengan sendirinya", dalam penggunaan masa kini, pandangan yang lebih skeptis yaitu bahwa postulat merupakan sebarang pernyataan, yang dirumuskan secara abstrak tanpa mempertimbangkan "kebenaran"-nya tetapi diterima tanpa justifikasi lebih lanjut sebagai fondasi untuk penalaran. Postulat-postulat dari satu segi dimaknai sebagai "aturan-aturan permainan" dari mana semua deduksi boleh dijalankan—fondasi pada mana keseluruhan teorema didasarkan.

Euclid mencoba untuk membangun keseluruhan bangunan besar pengetahuan geometri bangsa Yunani, yang terakumulasi sejak zaman Thales, berdasarkan lima postulat untuk sifat geometri yang khusus dan lima aksioma yang dimaksudkan berlaku umum untuk semua matematika—dalam teks ini nanti disebut sebagai konsep-konsep umum. Dia kemudian menyimpulkan dari 10 asumsi ini suatu rantai logis 465 proposisi, dengan menggunakan asumsi-asumsi tersebut sebagai batu pijakan dalam prosesi urut dari satu proposisi yang telah terbuktikan ke proposisi lainnya. Kehebatannya di sini adalah sedemikian banyak yang dapat diperoleh dari sedemikian sedikit aksioma yang dipilihnya secara cermat.

Secara tiba-tiba dan tanpa komentar pendahuluan, buku pertama dari *Elements* dibuka dengan suatu daftar 23 definisi. Definisi-definisi ini antara lain, apa titik itu ('yang tidak memiliki bagian-bagian') dan apakah garis itu ('yang tidak memiliki lebar'). Daftar definisi tersebut diakhiri dengan: "Garis-garis paralel adalah garis-garis lurus yang berada pada bidang yang sama dan diperpanjang secara tak terbatas pada kedua arah, tidak berjumpa satu sama lain pada arah yang satu maupun satu arah lainnya. Ini semua tidak dapat dianggap sebagai definisi dalam pemaknaan modern, melainkan lebih sebagai deskripsi-deskripsi naif dari berbagai gagasan yang digunakan dalam wacananya. Meski kabur dan tidak berguna dalam beberapa segi, tetapi deskripsi-deskripsi itu sudah memadai untuk menciptakan gambaran intuitif yang pasti.

Euclid selanjutnya menetapkan 10 prinsip penalaran pada mana bukti-bukti dalam *Elements* didasarkan, dan mengemukakannya seperti berikut.

1. Postulat

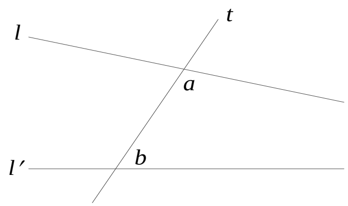
a. Suatu garis lurus dapat ditarik dari sebarang titik ke sebarang titik lainnya.

b. Suatu garis lurus terbatas dapat diperpanjang secara terus menerus pada suatu garis.
c. Suatu lingkaran dapat digambarkan dengan sebarang pusat dan jari-jari.
d. Semua sudut siku-siku adalah sama satu sama lainnya.
e. Jika suatu garis lurus yang memotong dua garis lurus menghasilkan sudut-sudut dalam yang terletak pada sisi yang sama kurang dari dua sudut siku-siku, maka kedua garis lurus itu, jika diperpanjang tak terbatas bertemu pada sisi itu di mana terdapat sudut-sudut yang kurang dari dua sudut siku-siku.

2. Konsep-konsep Umum

a. Hal-hal yang sama dengan suatu hal yang sama adalah juga sama satu sama lainnya.
b. Jika hal-hal yang sama ditambahkan kepada hal-hal yang sama, maka hasil-hasil keseluruhan dari penjumlahan-penjumlahan itu adalah sama.
c. Jika hal-hal yang sama dikurangi dari hal-hal yang sama, maka sisa-sisanya adalah sama.
d. Hal-hal yang bertepatan satu sama lain adalah juga sama satu sama lainnya.
e. Keseluruhan lebih besar daripada bagiannya.

Postulat e, yang lebih dikenal sebagai postulat kesejajaran Euclid, menjadi salah satu pernyataan yang paling terkenal dan kontroversial dalam sejarah matematika. Postulat ini menjelaskan bahwa jika dua garis l dan l' dipotong oleh transversal t sedemikian hingga jumlah besar sudut a dan besar sudut b kurang dari dua sudut siku-siku, maka l dan l' akan bertemu pada sisi t di mana sudut-sudut itu berada. Ciri mencolok dari postulat ini adalah pernyataan tegas tentang perpanjangan utuh suatu garis lurus, suatu daerah yang tidak pernah kita alami dan berada di luar kemungkinan jangkauan pengalaman kita.



Para ahli geometri yang terganggu oleh postulat kesejajaran tidak mempertanyakan bahwa isi kandungannya adalah sebuah fakta matematis. Mereka hanya mempersoalkan bahwa postulat itu tidak singkat, tidak sederhana, dan tidak jelas secara sendirinya—lain dari postulat-postulat pada umumnya. Kerumitannya menunjukkan bahwa pernyataan itu lebih tepat dipandang sebagai teorema, daripada sebagai asumsi. Di sisi lain, ada beberapa pertanda bahwa Euclid tidak sepenuhnya puas dengan postulat kelimanya; dia menunda penerapannya sampai di mana dia tidak dapat maju lebih jauh tanpanya, meski penggunaannya secara lebih awal akan dapat menyederhanakan beberapa bukti.

Hampir sejak *Elements* pertama kali muncul dan terus berlanjut sampai abad ke-19, para matematikawan telah mencoba untuk memperoleh postulat kesejajaran dari empat postulat pertama, meyakini bahwa aksioma-aksioma itu saja memadai untuk pengembangan lengkap geometri Euclid. Semua upaya ini yang dimaksudkan untuk mengubah status pernyataan tersebut dari "postulat" menjadi "teorema" berakhir pada kegagalan, karena tiap usaha itu bersandar pada asumsi tersembunyi yang ekuivalen dengan postulat itu sendiri. Meski tujuan utamanya mengalami kegagalan, tetapi usaha-usaha itu kemudian menuntun ke arah penemuan geometri-geometri non-Euclid, di mana aksioma-aksioma Euclid kecuali postulat kesejajaran berlaku, dan di mana semua teorema Euclid benar kecuali yang didasarkan pada postulat kesejajaran. Tanda dari kejeniusan Euclid dalam matematikanya yaitu dia menyadari bahwa postulat kelima menuntutkan pernyataan eksplisit sebagai sebuah asumsi, tanpa bukti formal.

Setelah kita menggali sifat aksiomatis dalam matematika, seperti tampak dari contoh yang dikemukakan di atas, sekarang kita akan segera membahas kelemahan atau kekurangan yang mungkin dari suatu sistem aksiomatis. Kembali, kita akan menggunakan kajian terkait *Elements* karya Euclid sebagai contoh untuk maksud tersebut.

B. NILAI PENTING DARI ISTILAH-ISTILAH YANG TIDAK DIDEFINISIKAN

Kajian yang terperinci selama 2000 tahun telah mengungkap banyak kekurangan dalam pembahasan Euclid tentang geometri. Sebagian besar dari definisi-definisinya terbuka bagi kritisisme untuk satu alasan atau alasan lainnya. Hal yang mengherankan adalah bahwa meski Euclid menyadari pentingnya sekumpulan pernyataan untuk diasumsikan di permulaan wacananya, namun dia tidak menyadari pentingnya istilah-istilah yang tidak didefinisikan.

Lagi pula, sebuah definisi hanya memberikan makna dari sebuah kata dalam kaitannya dengan istilah-istilah lain, kata-kata yang lebih sederhana, atau kata-kata yang maknanya sudah jelas. Kata-kata ini kemudian didefinisikan dengan kata-kata yang lebih sederhana lagi. Jelaslah, proses pendefinisian dalam suatu sistem logis tidak boleh dilanjutkan mundur tanpa sebuah akhir. Satu-satunya cara untuk menghindari kejadian "lingkaran setan" adalah dengan membiarkan istilah-istilah tertentu menjadi istilah-istilah yang tidak didefinisikan.

Euclid secara keliru mencoba untuk mendefinisikan keseluruhan kosakata teknis yang digunakannya. Secara tak terelakkan hal ini menuntunnya kepada definisi-definisi yang aneh dan tidak memuaskan. Kita diberitahu bukan apakah titik dan garis itu, tetapi justru yang bukan titik dan garis. "Suatu titik adalah sesuatu yang tidak memiliki bagian-bagian." "Suatu garis tidak memiliki lebar." (Yang menjadi pertanyaan kemudian adalah, apakah *bagian* atau *lebar* itu?) Gagasan "titik" dan "garis" adalah gagasan-gagasan yang paling mendasar dalam geometri. Keduanya dapat digambarkan dan dijelaskan tetapi tidak dapat didefinisikan secara memuaskan oleh konsep-konsep yang lebih sederhana daripada apa adanya mereka sendiri. Tentulah ada suatu awal di dalam sebuah sistem yang berdiri sendiri, sedemikian hingga istilah-istilah titik dan garis harus diterima tanpa definisi yang ketat dan tegas.

Barangkali keberatan terbesar yang pernah ditimpakan kepada penulis *Elements* ini adalah ketidakcukupan aksioma-aksiomanya. Dia secara formal mempostulatkan beberapa hal, namun sama sekali tidak mempostulatkan beberapa hal lain yang sama-sama diperlukan dalam kerjanya. Di samping kegagalan untuk menyatakan bahwa titik-titik dan garis-garis memang ada atau bahwa ruas garis yang menghubungkan dua titik adalah unik, Euclid membuat asumsi-asumsi implisit yang kemudian digunakannya dalam deduksi tetapi tidak dijamin oleh postulat-postulat dan tidak pula dapat diturunkan dari postulat-postulat itu.

Selama dua puluh lima tahun terakhir abad kesembilan belas, banyak matematikawan berusaha untuk memberikan pernyataan lengkap tentang postulat-postulat yang perlu untuk membuktikan semua teorema yang telah dikenal dalam geometri Euclid. Mereka mencoba untuk menambahkan postulat-postulat yang dapat memberikan eksplisitas dan bentuk bagi gagasan-gagasan yang dibiarkan oleh Euclid sekedar bersifat intuitif. Risalah yang paling berpengaruh terhadap geometri pada zaman modern adalah karya terkenal dari seorang matematikawan Jerman, David Hilbert (1862-1943). Hilbert menerbitkan karya utama geometrinya pada tahun 1899, *Grundlagen der Geometrie* (artinya, Fondasi-fondasi Geometri). Di dalamnya dia mendasarkan geometri Euclid pada 21 postulat yang melibatkan enam istilah yang tidak didefinisikan—di sisi lain, Euclid menggunakan lima postulat dan tidak satu pun istilah yang tidak didefinisikan.

C. TEOREMA, TEORI, DAN KONSEP DALAM MATEMATIKA

Salah satu kelompok perkara lebih sempit terkait hakikat matematika juga berkenaan upaya-upaya untuk menginterpretasi hasil-hasil yang spesifik dalam matematika atau sains. Ini meliputi antara lain pertanyaan-pertanyaan tentang aplikasi dari matematika. Apa yang dapat dikatakan oleh suatu teorema kepada kita tentang semesta fisika yang dipelajari dalam sains? Misalnya, sejauh mana kita dapat *membuktikan* hal-hal tentang simpul-simpul, stabilitas jembatan, akhir permainan catur, dan kecenderungan ekonomi? Beberapa filsuf memandang matematika sebagai permainan tak bermakna yang dimainkan dengan simbol-simbol, tetapi yang lainnya meyakini bahwa matematika memiliki makna tertentu. Apakah makna ini, dan bagaimana ia berhubungan dengan makna dari wacana non-matematis biasa? Apakah yang dikatakan oleh suatu teorema kepada kita tentang dunia fisik, tentang kedapat-tahuan manusia, tentang kemampuan-dalam-prinsip dari program-program komputer, dan sebagainya? Beberapa hasil matematika yang kaya akan filsafat antara lain teorema kepadadatan dan teorema Löwenheim-Skolem, teori himpunan dengan pilihan dari Zermelo-Fraenkel, dan teorema ketidak-lengkapan dari Gödel.

Satu kelompok perkara lain berhubungan dengan upaya-upaya untuk mengartikulasikan dan menginterpretasi *teori-teori* dan *konsep-konsep* matematis tertentu. Salah satunya adalah kerja fondasional dalam geometri, aritmetika, dan analisis. Kadang-kadang, aktivitas semacam ini memiliki percabangan-percabangan bagi matematika sendiri, sedemikian hingga mengaburkan batas antara matematika dan filsafatnya. Aktivitas fondasional seperti ini juga menetaskan seluruh cabang matematika, selain sekedar menjelaskan tentang pertanyaan-pertanyaan ontologis pokok. Kelompok ini menegaskan sifat interpretif dari filsafat matematika. Tugas yang ditanggungnya adalah mengkaji apakah suatu konsep matematis itu, dan mengkaji apakah yang dikatakan oleh serangkaian wacana matematis

Namun demikian, matematika tentu seringkali dapat berjalan baik tanpa adanya kerja interpretif filosofis, dan bahkan adakalanya ternyata kerja interpretif bersifat prematur dan mengalihkan perhatian. Lebih lanjut, kita tidak pernah bisa yakin bahwa suatu projek interpretif itu akurat dan lengkap, dan bahwa tidak persoalan lain yang sedang menanti untuk diselesaikan di hadapan kita.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Jelaskan menurut pendapat Anda mengapa generasi demi generasi memandang bahwa mempelajari Elements karya Euclid adalah suatu cara terbaik untuk mengembangkan kemampuan penalaran pasti!
2) Berdasarkan materi yang telah Anda baca, jelaskan kehebatan atau kontribusi besar Euclid bagi matematika, seperti tampak dari Elements.
3) Jelaskan apa yang dimaksud dengan istilah “aksioma” atau “postulat.” Apakah manfaat dari aksioma atau postulat tersebut?
4) Jelaskan bagaimana Euclid mencoba untuk membangun keseluruhan bangunan besar pengetahuan geometri bangsa Yunani!
5) Berdasarkan materi yang Anda baca, coba jelaskan beberapa kekurangan pembahasan Euclid tentang geometri, dalam pandangan para matematikawan modern.
6) Jelaskan apa yang dimaksud kejadian “lingkaran setan” dalam proses pendefinisian pada suatu sistem logis!
7) Berikan tiga alasan untuk menjelaskan mengapa keputusan Euclid untuk mendefinisikan semua kosakata teknis yang digunakannya dianggap keliru!
8) Jelaskan bagaimana para matematikawan modern mencoba untuk membenahi geometri Euclid! Berikan sebuah contoh nyata yang dilakukan oleh David Hilbert.
9) Pada kegiatan belajar ini, kita telah membahas dua perkara lebih sempit terkait hakikat matematika tentang teorema, teori, dan konsep dalam

matematika. Sebutkan dua perkara itu dan berikan satu pertanyaan yang mewakili masing-masing perkara tersebut.

10) Jelaskan mengapa adakalanya kita sebaiknya tidak hanya berlarut-larut atau memberi penekanan terlalu besar pada kerja interpretif filosofis dalam matematika. Berikan tiga alasan yang Anda pelajari dari materi dalam kegiatan belajar ini!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Jawaban dapat beragam, misalnya: Pengetahuan matematis dalam *Elements* karya Euclid dikembangkan melalui bukti, di mana satu hasil diperoleh dari hasil yang lain dalam urutan logis yang ketat. Dengan mempelajarinya, kita dapat mengembangkan penalaran pasti kita dengan bercermin pada "pilihan khusus aksioma, penyusunan proposisi, dan ketegasan demonstrasi" dari Euclid.
2) Kehebatan Euclid bukan dalam kontribusi materi asli melainkan dalam keahlian mengatur berbagai fakta saling lepas yang luas menjadi bahasan definitif geometri Yunani dan teori bilangan. Pilihan khusus aksioma, penyusunan proposisi, dan ketegasan demonstrasi adalah pencapaiannya sendiri. Satu hasil diperoleh dari hasil yang lain dalam urutan logis yang ketat, dengan asumsi-asumsi sesedikit mungkin dan sedikit sekali yang berlebihan.
3) Aksioma atau postulat adalah pernyataan yang diasumsikan secara begitu saja, dari mana semua pernyataan lainnya kemudian disimpulkan sebagai konsekuensi-konsekuensi logis; kebenaran yang terbukti dengan sendirinya (pandangan tradisional); sebarang pernyataan yang dirumuskan secara abstrak tanpa mempertimbangkan "kebenaran"-nya tetapi diterima tanpa justifikasi lebih lanjut sebagai fondasi penalaran (pandangan lebih skeptis). Manfaat dari aksioma atau postulat adalah untuk menghindari sirkularitas dan memberikan titik awal.
4) Euclid mencoba untuk membangun keseluruhan bangunan besar pengetahuan geometri bangsa Yunani berdasarkan lima postulat untuk sifat geometri yang khusus dan lima aksioma yang dimaksudkan berlaku umum untuk semua matematika. Dia kemudian menyimpulkan dari 10 asumsi ini suatu rantai logis 465 proposisi, dengan menggunakan asumsi-asumsi tersebut sebagai batu pijakan dalam prosesi urut dari satu proposisi yang telah terbuktikan ke proposisi lainnya. Sedemikian

banyak diperoleh dari sedemikian sedikit aksioma yang dipilihnya secara cermat.

5) Beberapa kekurangan pembahasan geometri oleh Euclid antara lain:
   a) Euclid menyadari pentingnya sekumpulan pernyataan diasumsikan di permulaan wacananya tetapi tidak menyadari pentingnya istilah-istilah yang tidak didefinisikan.
   b) Euclid mencoba untuk mendefinisikan seluruh kosakata teknis yang digunakannya. Tentulah ada suatu awal di dalam sebuah sistem yang berdiri sendiri, sedemikian hingga istilah-istilah tertentu harus diterima tanpa definisi yang ketat dan tegas.
   c) Ketidakcukupan aksioma-aksiomanya. Artinya, Euclid secara formal mempostulatkan beberapa hal, namun sama sekali tidak mempostulatkan beberapa hal lain yang sama-sama diperlukan dalam kerjanya, sedemikian hingga terdapat asumsi-asumsi implisit yang digunakannya dalam deduksi tetapi tidak dijamin oleh postulat-postulat dan tidak pula dapat diturunkan dari postulat-postulat itu.
6) Kejadian "lingkaran setan" adalah proses pendefinisian dalam suatu sistem logis yang terus berlanjut mundur tanpa akhir. Cara menghindarinya adalah dengan menetapkan istilah-istilah tertentu tidak didefinisikan.
7) Keputusan Euclid untuk mendefinisikan semua kosakata teknisnya keliru karena:
   a) Ini menuntunnya kepada definisi-definisi yang aneh dan tidak memuaskan. Misalnya, kita diberitahu bukan apakah titik dan garis itu, tetapi justru yang bukan titik dan garis. "Suatu titik adalah sesuatu yang tidak memiliki bagian-bagian." "Suatu garis tidak memiliki lebar." (Yang menjadi pertanyaan kemudian adalah, apakah *bagian* atau *lebar* itu?)
   b) Konsep-konsep matematis tertentu dapat digambarkan dan dijelaskan tetapi tidak dapat didefinisikan secara memuaskan oleh konsep-konsep yang lebih sederhana daripada apa adanya mereka sendiri.
   c) Ada suatu awal di dalam sebuah sistem yang berdiri sendiri, sedemikian hingga istilah-istilah tertentu harus diterima tanpa definisi yang ketat dan tegas.

8) Banyak matematikawan modern mencoba untuk menambahkan postulat-postulat yang dapat memberikan eksplisitas dan bentuk bagi gagasan-gagasan yang oleh Euclid dibiarkan sekedar bersifat intuitif. David Hilbert dalam bukunya *Grundlagen der Geometrie* (1899) mendasarkan geometri Euclid pada 21 postulat yang melibatkan enam istilah yang tidak didefinisikan.
9) Dua perkara itu adalah:
   a) Perkara menginterpretasi hasil-hasil yang spesifik dalam matematika atau sains. Ini meliputi antara lain pertanyaan-pertanyaan tentang aplikasi dari matematika. Misalnya: Apa yang dapat dikatakan oleh suatu teorema kepada kita tentang semesta fisika yang dipelajari dalam sains?
   b) Perkara mengartikulasikan dan menginterpretasi *teori-teori* dan *konsep-konsep* matematis tertentu. Misalnya: Apakah suatu konsep matematis itu? Apakah yang dikatakan dalam serangkaian wacana matematis?
10) Kita sebaiknya tidak hanya berlarut-larut atau memberi penekanan terlalu besar pada kerja interpretif filosofis dalam matematika karena, antara lain:
    a) Matematika seringkali dapat berjalan baik tanpa adanya kerja interpretif filosofis.
    b) Adakalanya kerja interpretif bersifat prematur dan mengalihkan perhatian.
    c) Kita tidak pernah bisa yakin bahwa suatu projek interpretif adalah akurat dan lengkap, dan bahwa tidak persoalan lain yang sedang menanti untuk diselesaikan di hadapan.

RANGKUMAN

Matematika memiliki sifat aksiomatis berarti bahwa satu pernyataan matematis diperoleh dari pernyataan matematis lain dalam urutan logis yang ketat, yang bercirikan pilihan aksioma-aksioma, penyusunan proposisi-proposisi, dan ketegasan demonstrasi. Suatu aksioma atau postulat dapat diartikan sebagai kebenaran yang terbukti dengan sendirinya, diasumsikan begitu saja, atau diterima tanpa justifikasi lebih lanjut sebagai fondasi untuk penalaran, untuk menghindari sirkularitas dan memberikan titik awal.

Suatu sistem pengetahuan aksiomatis dapat disempurnakan dengan cara menambahkan aksioma-aksioma atau postulat-postulat yang dapat memberikan eksplisitas dan bentuk bagi gagasan-gagasan yang pada awalnya sekedar bersifat intuitif.

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Berikut ini adalah pengertian dari istilah "aksioma" atau "postulat", *kecuali* ....
   A. Pernyataan yang diasumsikan secara begitu saja, dari mana semua pernyataan lainnya disimpulkan sebagai konsekuensi-konsekuensi logis.
   B. Kebenaran yang terbukti secara sendirinya.
   C. Pernyataan yang telah dibuktikan berdasarkan pernyataan-pernyataan lain yang telah terbuktikan sebelumnya.
   D. Aturan-aturan permainan dari mana semua deduksi boleh dijalankan, suatu fondasi pada mana keseluruhan teorema didasarkan.

2) Berikut ini adalah apa yang berhasil dicapai atau dilakukan oleh Euclid sehubungan dengan karyanya, *Elements*, *kecuali* ....
   A. Euclid mengatur berbagai fakta saling lepas yang luas menjadi bahasan definitif geometri Yunani dan teori bilangan.
   B. Semua teorema dalam Elements adalah temuan Euclid sendiri.
   C. Euclid sendirilah yang memilih aksioma-aksioma, menyusun proposisi-proposisi, dan melakukan demonstrasi logis secara tegas dalam Elements.
   D. Euclid menyimpulkan suatu rantai 465 proposisi dari 10 asumsi yang dipilihnya.

3) Supaya sebuah sistem aksiomatis terhindar dari kejadian "lingkaran setan", hal manakah berikut ini yang harus dihindari?
   A. Sekumpulan pernyataan yang diasumsikan tanpa bukti di awal wacana.
   B. Tidak adanya istilah-istilah yang tidak didefinisikan.
   C. Penerapan deduksi logis.
   D. Penggunaan asumsi-asumsi awal sebagai batu pijakan dalam prosesi urut dari satu proposisi yang telah terbuktikan ke proposisi lainnya.

4) Hal-hal berikut ini muncul atau terjadi sebagai reaksi para matematikawan terhadap postulat kesejajaran dari Euclid, *kecuali* ....
   A. Postulat itu dianggap tidak singkat, tidak sederhana, dan tidak jelas secara sendirinya, kerumitannya menunjukkan bahwa ia lebih tepat dipandang sebagai teorema.
   B. Para matematikawan telah mencoba untuk memperoleh postulat kesejajaran dari empat postulat pertama, meyakini bahwa aksioma-aksioma itu saja memadai untuk pengembangan lengkap geometri Euclid.
   C. Upaya untuk mengubah status postulat kesejajaran dari "postulat" menjadi "teorema" pada akhirnya berhasil.
   D. Upaya para matematikawan terkait postulat kesejajaran menuntun ke arah penemuan geometri-geometri non-Euclid.

Untuk Soal 5-10, perhatikan masing-masing ciri atau sifat dari pembahasan Euclid tentang geometri dalam *Elements* yang dicantumkan di bawah ini. Nilailah kebenaran tiap ciri atau sifat itu berdasarkan pandangan *matematika modern.* Selanjutnya, pada kotak yang tersedia, tuliskan "B" jika ciri atau sifat itu benar atau tuliskan "S" jika ciri atau sifat itu salah.

5) ☐ Pilihan khusus aksioma, penyusunan proposisi, dan ketegasan demonstrasi.
6) ☐ Terdapat asumsi-asumsi implisit yang digunakan dalam deduksi tetapi tidak dijamin oleh postulat-postulat dan tidak pula dapat diturunkan dari postulat-postulat.
7) ☐ Fakta-fakta tertentu tentang sifat dari pokok bahasan harus diasumsikan tanpa bukti.
8) ☐ Tidak ada istilah-istilah tertentu yang tidak didefinisikan.
9) ☐ Satu hasil diperoleh dari hasil yang lain dalam urutan logis yang ketat, dengan asumsi-asumsi sesedikit mungkin dan sedikit sekali yang berlebihan.
10) ☐ Terdapat gagasan-gagasan yang dibiarkan sekedar bersifat intuitif.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 3. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 3

Suatu Perspektif Historis

Di dalam kegiatan belajar ini dibahas suatu perspektif historis tentang matematika. Perspektif ini disajikan terutama untuk memberikan sekilas gambaran refleksi hakikat matematika dalam perkembangannya dari waktu ke waktu, dan juga sebagai orientasi awal pembahasan sejarah matematika yang akan diuraikan pada sejumlah modul berikutnya. Dengan mengingat sifat materi dalam kegiatan belajar ini tampaknya sangat kaya dan padat informasi baru, maka sebaiknya Anda membuat catatan-catatan kecil untuk dibuka kembali dan didiskusikan, yang isinya mungkin kelak akan lebih dapat dipahami seiring Anda merefleksi dan belajar lebih lanjut menempuh pembahasan modul demi modul.

A. MATEMATIKA MASA LALU, KINI, DAN MASA DEPAN

Sebagaimana Niels Bohr katakan: Prediksi adalah sesuatu yang sukar, terutama tentang masa depan. Upaya-upaya untuk memprediksi masa depan adalah hipotesis-hipotesis tentang masa lalu dan saat ini. Mari kita coba rumuskan suatu hipotesis bahwa kita dapat memeriksa koherensi dan akurasi terhadap masa lalu dan masa kini, kemudian berupaya menilai konsekuensi-konsekuensinya untuk masa depan.

Tradisi ilmiah kita diwariskan dari peradaban Yunani Kuno. Di sanalah konsep sains sebagai suatu penstrukturan yang bersifat sadar diri pada pengetahuan objektif berkaidah tentang dunia (atau, lebih tegasnya, tentang proses-proses tersembunyi di alam) pertama kali muncul. Meskipun bangsa Yunani menyelidiki keseluruhan rentang pengalaman manusia, tetapi prestasi mereka dalam mengkreasi pengetahuan ilmiah yang permanen adalah terutama dalam sains-sains matematis, dalam matematika sendiri, dan disiplin-disiplin ilmu yang sangat matematis seperti astronomi planet, teori musik, serta kajian matematis tentang objek-objek statis. Bangsa Yunani Kuno menciptakan suatu bentuk penyempurnaan teori matematis yang rumit untuk mengkaji bilangan bulat, geometri, rasio, dan pengukuran geometris. Dalam teori ini, mereka juga menyelesaikan suatu konsep argumen matematis yang mapan, tentang deduksi matematis. Berdasarkan pencapaian-pencapaian tersebut, Plato dapat mengemukakan dalam dialog terkenalnya

Timaeus tentang *mitos* matematis untuk alam semesta dan susunannya berdasarkan elemen-elemen geometrik, dan Aristoteles dapat merumuskan prinsip-prinsip logis deduksi saat menolak kemungkinan hukum-hukum matematis untuk fenomena fisika objek-objek di alam.

Ada baiknya kita juga berbicara tentang revolusi-revolusi dalam sains. Pada tingkat yang paling fundamental, terdapat hanya satu revolusi sains—terjadi pada abad ke-17, pada mana sains modern terbentuk. Konsep sains yang terbentuk ketika itu memberikan suatu deskripsi tentang alam semesta, semesta atau *univers* fisika, dalam kaitannya dengan geometri ruang dan relasi-relasi numerik—suatu deskripsi yang berlaku baik pada benda-benda di langit maupun di Bumi. Konsep sains ini melihat alam semesta sebagai realm relasi-relasi berkaidah yang bersifat objektif, lepas dari tindakan atau pengaruh manusia. Realitas dipisahkan setelah Descartes ke dalam dua bagian yang sepenuhnya tersendiri: semesta fisika dan dunia terpisah yang meliputi kesadaran dan jiwa manusia. Kerangka ini memberi ruang bagi kesadaran manusia untuk menentukan berbagai rahasia dari proses-proses alam bukan dengan observasi pasif tetapi dengan mentransformasi alam melalui eksperimen.

Ketika itu pula muncul pasangan matematis untuk sains fisika baru, yang berperan sebagai perintis dan juga alat utamanya. Ini adalah matematika dalam bidang aljabar baru dan gerakan analitik oleh Vieta dan Descartes, suatu matematika yang mengedepankan kalkulasi dan manipulasi lambang-lambang simbolik sebagai pengganti sofistikasi deduktif bangsa Yunani. Sistem ini mengangkat analisis atau penguraian fenomena kompleks ke dalam elemen-elemen sederhana untuk menggantikan penekanan bangsa Yunani pada deduksi. Pada abad ketujuh belas, matematika ini meraih dua kesuksesan. Pertama, lahirnya geometri analitik dengan mana struktur geometrik untuk ruang dapat ditransfomasi melalui koordinasi ke dalam kajian analisis aljabar. Kedua, penemuan mesin analitik hebat berupa kalkulus turunan dan integral, dengan mana argumen-argumen rumit dan sukar berdasarkan metode pemerasan dari Eudoxos dan Archimedes untuk menangani proses-proses infinit digantikan dengan formula aljabar atau *calculi* yang jauh lebih sederhana dan lebih dapat dikelola. Inilah alat yang memungkinkan Newton untuk membangun mesin-alam matematisnya, paradigma sentral bagi gambar-gambar dunia ilmiah dari zaman-zaman setelahnya.

Ada dua bentuk utama di mana pengetahuan objektif manusia dapat dirumuskan: dalam kata-kata dan dalam bentuk-bentuk matematis. Aristoteles memilih yang pertama dan menciptakan suatu deskripsi sistematik dunia di mana bentuk subjek-predikat dari kalimat ditransfomasikan ke dalam pola objek atau substansi individual yang memiliki suatu kualitas tertentu. Mulai dari abad ketujuh belas, sains modern telah menolak bentuk deskripsi ini dan menggantinya dengan deskripsi-deskripsi dalam beragam bentuk matematis. Bentuk-bentuk ini telah mengalami perubahan seiring bentuk-bentuk itu meningkat jumlahnya, dan menjadi lebih kaya serta lebih mutakhir. Bentuk-bentuk aslinya bersifat geometrik, dalam gaya bangsa Yunani. Pada zaman Renaissance, suatu konsep bilangan baru dan lebih fleksibel, bilangan "real" dalam pemaknaan masa kini, muncul sebagai besaran umum untuk panjang, luas, volume, massa, dan sebagainya, tanpa pembedaan pasti di antara besaran-besaran ini dalam hubungannya dengan bentuk geometrik yang telah digunakan bangsa Yunani Kuno. Pada perkembangan aljabar yang kemudian mengikutinya, jenis-jenis "bilangan" baru muncul sebagai penyelesaian-penyelesaian untuk persamaan-persamaan aljabar. Karena ini bukanlah bilangan dalam pemaknaan lama, beberapa tokoh menyebutnya "imajiner", dan campuran dari dua jenis bilangan tersebut dikenal sebagai bilangan "kompleks." Barulah pada akhir abad kedelapan belas, bilangan-bilangan kompleks sepenuhnya dinaturalisasikan sebagai anggota dari realm matematis yang masuk akal setelah diidentifikasi dalam cara sederhana dengan titik-titik pada suatu bidang Euclid, bidang kompleks.

Sejak abad ketujuh belas, upaya deskripsi ilmiah untuk alam telah terus berkembang dalam medium matematis ini, yang dahulu diisyaratkan oleh alam mitos matematis Plato. Bidang-bidang keilmuan sains baru mengalami perkembangan, dan itu semua memasuki kerangka yang sama dalam hal relasi-relasi numerik, bentuk geometrik dalam ruang, dan rumusan prinsip-prinsip dasar dalam kaidah-kaidah yang dituliskan secara matematis.

Pada hampir sekitar empat abad berlalu sejak Galileo memulai revolusi sains abad ketujuh belas, hubungan yang menarik dalam otonomi dan saling ketergantungan di antara sains-sains alam dan matematika telah mengambil bentuk-bentuk yang semakin kompleks dan mutakhir. Medium matematis di mana beragam sains hidup terus berkembang dan mengambil bentuk-bentuk baru. Pada awal abad kesembilan belas, konsep intuitif simetri yang diterapkan pada kajian akar dari persamaan aljabar telah melahirkan konsep grup. Konsep ini, menembus medium aplikasinya pada geometri dan persamaan turunan, pada abad kedua puluh menjadi blok bangunan paling esensial dari deskripsi fundamental semesta fisika. Konsep ruang, diperkaya dengan gagasan dari Gauss dan Riemann, melahirkan konsep-konsep geometrik lebih kaya berupa “manifold” Riemann dan kurvatur, dengan mana teori relativitas umum dari Einstein berpotensi untuk mendeskripsikan alam semesta. Melalui analisis persamaan integral dan persamaan turunan pada awal abad kedua puluh, konsep vektor dimensi-infinit lahir, dan khususnya konsep kaya tentang ruang Hilbert. Operator-operator pada suatu ruang Hilbert dengan teori spektrum mereka berperan sebagai landasan akhir dari struktur formal mekanika kuantum. Ini adalah tiga contoh penting dari suatu fenomena yang sangat luas.

Berbagai konsep dan teori baru timbul dalam penelitian matematika melalui tekanan dari perlunya memecahkan masalah dan menciptakan alat bantu intelektual dengan mana teori dan struktur matematis yang sudah ada dapat diperluas dan diterapkan. Segera setelah konsep-konsep dan teori-teori baru ditetapkan, maka semua itu sendirinya juga menjadi fokus dari penelitian yang intensif. Sesuatu yang baru itu dicapai dengan imajinasi matematis, diaplikasikan melalui medium konstruksi-konstruksi matematis dengan mana konsep-konsep dan struktur-struktur baru diberikan bentuk tertentunya. Meski proses imajinatif ini dalam makna sesungguhnya bersifat bebas, tetapi hasil darinya segera setelah lahir menjadi suatu realm objektif baru tentang hubungan suatu karakter yang bersifat tertentu. Alat-alat bantu klasik seperti deduksi dan kalkulasi digunakan untuk menetapkan sifat-sifatnya, mengarah kepada masalah-masalah teknis baru yang mungkin akhirnya memintakan konsep dan konstruksi baru untuk memecahkannya. Lompatan gagasan dan imajinasi yang mengarahkan kepada temuan-temuan besar baru dalam matematika membuktikan ketidakbenaran anggapan stereotip aktivitas matematis sebagai suatu proses yang bersifat otomatis layaknya mesin berupa penerapan mekanis aturan-aturan formal.

Penelitian matematis secara keseluruhan menyeimbangkan proses *radikal* pemunculan konsep dan teori baru dengan kecenderungan *konservatif* untuk mempertahankan eksistensi semua domain, masalah, dan tema konseptual yang sebelumnya telah ditetapkan sebagai fokus dari penelitian matematis yang signifikan. Keseimbangan di antara dua kecenderungan yang berlawanan ini memunculkan fakta yang menarik bahwa, pada waktu bersamaan, seseorang dapat menemukan program-program penelitian aktif sama penting yang memangku dua tema, satu tema berumur dua ribu tahun dan satu tema lainnya hanya berumur satu dekade. Namun demikian, masalah berumur dua ribu tahun itu mungkin dapat terpecahkan oleh alat bantu dan konsep-konsep dari periode yang relatif baru.

Semakin kaya penelitian matematis modern, semakin luas pula konsep dan alat bantu yang tersedia bagi sains-sains yang menerapkan matematika. Kesukarannya terletak pada antara lain masalah komunikasi, masalah kemampuan para praktisi sains untuk menembus kesukaran terjemahan antar bahasa atau peristilahan yang digunakan bidang-bidang ilmu yang berbeda, serta masalah mengetahui apa yang relevan dalam konsep-konsep dan teknik-teknik yang tersedia.

Saat perhatian dan fokus utama dari kepentingan sains berpindah ke domain-domain yang lebih jauh dari domain-domain klasik terkait teori dan pengalaman, maka peran berbagai gagasan dan teknik matematis, mau tidak mau, berkembang karena matematika seringkali menjadi satu-satunya alat bantu yang memungkinkan seseorang untuk menyelidiki lebih lanjut ke dalam bidang yang tidak diketahui. Ini terutama benar bagi domain-domain yang melibatkan kompleksitas organisasi atau nonlinearitas interaksi, perbatasan masa depan dari tema-tema besar kemajuan dalam sains.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tulislah dan kemudian maknai kembali pandangan Niels Bohr tentang prediksi masa depan dalam kata-kata Anda sendiri!
2) Jelaskan tentang prestasi bangsa Yunani Kuno dalam bidang sains dan matematika.
3) Jelaskan perbedaan dalam bagaimana Plato dan Aristoteles masing-masingnya berupaya untuk memahami alam semesta dan fenomena fisik.
4) Jelaskan tentang revolusi dalam sains pada abad ke-17!
5) Jelaskan pandangan Descartes tentang realitas!
6) Tuliskan dua ciri dari matematika dalam bidang aljabar baru dan gerakan analitik oleh Vieta dan Descartes!
7) Jelaskan tentang dua kesuksesan matematika pada abad ke-17.

8) Berdasarkan materi dalam kegiatan belajar ini, sebutkan dua peran penelitian matematika bagi perkembangan matematika!
9) Tuliskan pendapat Anda terhadap anggapan stereotip bahwa aktivitas matematis adalah suatu proses yang bersifat otomatis layaknya mesin berupa penerapan mekanis aturan-aturan formal.
10) Semakin kaya penelitian matematis modern, semakin luas pula konsep dan alat bantu yang tersedia bagi sains-sains yang menerapkan matematika. Sebutkan tiga faktor yang menjadi kendala terwujudnya hal tersebut!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) "Prediksi adalah sesuatu yang sukar, terutama tentang masa depan. Upaya-upaya untuk memprediksi masa depan adalah hipotesis-hipotesis tentang masa lalu dan saat ini." Tuturan ini mungkin dimaknai secara sederhana sebagai, misalnya: Untuk memprediksi masa depan, kita lebih dahulu mencoba untuk mengkaji masa lalu dan saat ini, dan menjadikan hasilnya sebagai landasan penyimpulan tentang masa yang akan datang.
2) Peradaban Yunani Kuno menjadi sumber tradisi ilmiah yang kini berkembang luas dan juga di sanalah konsep sains pertama kali muncul. Bangsa Yunani Kuno menyelidiki keseluruhan rentang pengalaman manusia, dan prestasi mereka dalam mengkreasi pengetahuan ilmiah yang permanen adalah terutama dalam sains-sains matematis, dalam matematika sendiri, dan disiplin-disiplin ilmu yang sangat matematis.
3) Plato mengangkat mitos matematis untuk alam semesta dan susunannya berdasarkan elemen-elemen geometrik, sedangkan Aristoteles merumuskan prinsip-prinsip logis deduksi saat menolak kemungkinan hukum-hukum matematis untuk fenomena fisika objek-objek di alam.
4) Konsep sains yang terbentuk pada revolusi sains abad ke-17 memberikan suatu deskripsi tentang alam semesta, semesta atau univers fisika, dalam kaitannya dengan geometri ruang dan relasi-relasi numerik. Konsep sains ini melihat alam semesta sebagai realm relasi-relasi berkaidah yang bersifat objektif, lepas dari tindakan atau pengaruh manusia.
5) Descartes memisahkan realitas ke dalam semesta fisika dan suatu dunia terpisah yang meliputi kesadaran dan jiwa manusia. Kerangka ini memberi ruang bagi kesadaran manusia untuk menentukan berbagai

rahasia dari proses-proses alam bukan dengan observasi pasif tetapi dengan mentransformasi alam melalui eksperimen.

6) Dua ciri tersebut adalah:
   a) mengedepankan kalkulasi dan manipulasi lambang-lambang simbolik yang berperan sebagai pengganti sofistikasi deduktif bangsa Yunani;
   b) mengangkat analisis atau penguraian fenomena kompleks ke dalam elemen-elemen sederhana untuk menggantikan penekanan bangsa Yunani pada deduksi.
7) Dua kesuksesan matematika pada abad ke-17:
   a) Lahirnya geometri analitik dengan mana struktur geometrik untuk ruang dapat ditransfomasi melalui koordinasi ke dalam kajian analisis aljabar.
   b) Penemuan kalkulus turunan dan integral.
8) Peran penelitian matematika antara lain:
   a) mewadahi munculnya konsep dan teori baru dalam matematika yang dipicu tekanan dari perlunya memecahkan masalah dan menciptakan alat bantu intelektual dengan mana teori dan struktur matematis yang sudah ada dapat diperluas dan diterapkan;
   b) menyeimbangkan proses "radikal" pemunculan konsep dan teori baru dengan kecenderungan "konservatif" untuk mempertahankan eksistensi semua domain, masalah, dan tema konseptual yang sebelumnya telah ditetapkan sebagai fokus dari penelitian matematis yang signifikan.
9) Jawaban untuk pertanyaan terbuka ini mungkin beraneka ragam. Misalnya: Anggapan stereotip itu tidak benar, karena salah satu faktor penting yang mengarahkan para matematikawan kepada temuan-temuan besar baru dalam matematika—misalnya konsep, teori, dan konstruksi matematis—adalah lompatan gagasan dan imajinasi matematis.
10) Faktor-faktor yang menjadi kendala terwujudnya ketersediaan konsep dan alat bantu matematis bagi sains-sains yang menerapkan matematika adalah antara lain:
   a) masalah komunikasi;
   b) masalah kemampuan para praktisi sains untuk menembus kesukaran terjemahan antar bahasa atau peristilahan yang digunakan bidang-bidang ilmu yang berbeda;
   c) masalah mengetahui apa yang relevan dalam konsep-konsep dan teknik-teknik yang tersedia.

RANGKUMAN

Peradaban Yunani Kuno menjadi sumber tradisi ilmiah yang kini berkembang luas dan di sanalah juga konsep sains pertama kali muncul. Bangsa Yunani Kuno menciptakan suatu bentuk penyempurnaan teori matematis yang rumit untuk mengkaji bilangan bulat, geometri, rasio, dan pengukuran geometris. Dalam teori ini, mereka juga menyelesaikan suatu konsep argumen matematis yang mapan, tentang deduksi matematis.

Terjadinya revolusi sains pada abad ke-17 tidak lepas dari peran matematika sebagai perintis dan sekaligus alat utamanya: geometri analitik dengan mana struktur geometrik untuk ruang dapat ditransfomasi melalui koordinasi ke dalam kajian analisis aljabar, dan mesin analitik hebat berupa kalkulus turunan dan integral yang menjadikan penanganan proses-proses infinit jauh lebih sederhana dan lebih dapat dikelola.

TES FORMATIF 3

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Berikut ini adalah peradaban-peradaban besar yang juga terkenal akan prestasi-prestasi matematisnya. Bangsa manakah yang pertama kali berhasil mengembangkan matematika teoretis berdasarkan bukti dalam suatu sistem aksiomatis?
   A. Bangsa Babilonia
   B. Bangsa Mesir Kuno
   C. Bangsa Persia
   D. Bangsa Yunani Kuno

2) Pada tingkat yang paling fundamental, kapankah terjadi revolusi dalam sains?
   A. Zaman Renaissance
   B. Abad ke-18
   C. Abad ke-17
   D. Abad ke-19

3) Descartes membagi realitas ke dalam dua bagian, yaitu ....
   A. realitas objektif dan realitas subjektif
   B. semesta fisika serta dunia kesadaran dan jiwa manusia

C. fakta dan asumsi
D. realm matematis dan realm fisika

4) Berikut ini adalah ciri-ciri dari matematika yang berkembang pada abad ke-17, *kecuali* ....
A. Kalkulasi dan manipulasi lambang-lambang simbolik digunakan dalam matematika sebagai pengganti sofistikasi deduktif bangsa Yunani.
B. Struktur geometrik untuk ruang ditransfomasikan melalui koordinasi ke dalam kajian analisis aljabar.
C. Argumen-argumen rumit dan sukar berdasarkan metode pemerasan dari Eudoxus dan Archimedes untuk menangani proses-proses infinit digantikan dengan formula aljabar atau calculi yang jauh lebih sederhana dan lebih dapat dikelola.
D. Matematika menggunakan deskripsi sistematik dunia yang mentransformasikan bentuk subjek-predikat dari kalimat ke dalam pola objek atau substansi individual yang memiliki suatu kualitas tertentu.

5) Berdasarkan materi yang sudah Anda pelajari dalam kegiatan belajar ini, pernyataan-pernyataan tentang bilangan berikut ini benar, *kecuali* ....
A. Suatu konsep bilangan baru yang lebih fleksibel, yaitu bilangan real pada pemaknaan masa kini, muncul pada zaman Renaissance.
B. Bilangan imajiner digunakan sebagai besaran umum untuk panjang, luas, volume, massa, dan sebagainya.
C. Campuran dari bilangan real dan bilangan imajiner disebut bilangan kompleks.
D. Pada akhir abad ke-18, bilangan-bilangan kompleks sepenuhnya diterima sebagai anggota dari real matematis yang masuk akal.

Untuk Soal 6-10, kajilah tiap pernyataan di bawah ini. Selanjutnya, pada kotak yang tersedia, tuliskan “B” jika pernyataan itu benar atau tuliskan “S” jika pernyataan itu salah.

6) ☐ Upaya-upaya untuk memprediksi masa depan tidak terkait dengan hipotesis-hipotesis tentang masa lalu dan saat ini.
7) ☐ Keperluan untuk memecahkan masalah dan menciptakan alat bantu intelektual dengan mana teori dan struktur matematis yang sudah ada dapat diperluas dan diterapkan merupakan faktor pendorong bagi penemuan konsep dan teori baru.

8) ☐ Aktivitas matematis merupakan suatu proses yang bersifat otomatis layaknya mesin berupa penerapan mekanis aturan-aturan formal.

9) ☐ Semakin kaya penelitian matematis modern, semakin luas pula konsep dan alat bantu yang tersedia bagi sains-sains yang menerapkan matematika.

10) ☐ Matematika seringkali menjadi satu-satunya alat bantu yang memungkinkan seseorang untuk menyelidiki lebih lanjut ke dalam bidang yang tidak diketahui.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 3 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 3.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 3, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A 7+ 11 = 18
2) C Matematika adalah ratu dari sains.
3) C diketahui secara empirik
4) B Pada sebarang segitiga, jumlah dari ketiga sudut dalamnya sama dengan dua sudut siku-siku.
5) B realisme
6) D mengisyaratkan bahwa eksistensi real matematis terikat pada semesta fisik, pikiran manusia, komunitas para matematikawan, dan sebagainya
7) D “idealisme” dan “anti-realisme dalam nilai kebenaran”
8) B Hubungan sains dan matematika sebaiknya dibatasi pada “matematika terapan” saja.
9) C Hubungan sains dan matematika sebaiknya dibatasi pada “matematika terapan” saja.
10) D realisme versus nominalisme

Tes Formatif 2

1) C Pernyataan yang telah dibuktikan berdasarkan pernyataan-pernyataan lain yang telah terbuktikan sebelumnya.
2) B Tidak adanya istilah-istilah yang tidak didefinisikan.
3) B Tidak adanya istilah-istilah yang tidak didefinisikan.
4) C Upaya untuk mengubah status postulat kesejajaran dari “postulat” menjadi “teorema” pada akhirnya berhasil.
5) B
6) S
7) B
8) S
9) B
10) S

Tes Formatif 3

1) D Bangsa Yunani Kuno
2) B Abad ke-18
3) B semesta fisika serta dunia kesadaran dan jiwa manusia

4) D Matematika menggunakan deskripsi sistematik dunia yang mentransformasikan bentuk subjek-predikat dari kalimat ke dalam pola objek atau substansi individual yang memiliki suatu kualitas tertentu.
5) B
6) S
7) B
8) S
9) B
10) B

Daftar Pustaka

Anglin, W.S. (1994). *Mathematics: A Concise History and Philosophy*. New York: Springer-Verlag.

Annas, J. (1976). *Aristotle's Metaphysics: Books M and N*. Oxford: Clarendon Press.

Aspray, W, & Kitcher, P. (eds.). (1988). *History and Philosophy of Modern Mathematics*. Minneapolis, MN: The University of Minnesota Press.

Bell, E.T. (1986). *Men of Mathematics*. New York: Simon and Schuster.

Burton, D. M. (2007). *The History of Mathematics: An Introduction*. New York: McGraw-Hill.

Demopoulos, W. (ed.). (1997). *Frege's Philosophy of Mathematics*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Plato. (1961). *The Collected Dialogues of Plato*, ed. oleh Edith Hamilton dan Huntingdon Cairns. Princeton: Princeton University Press.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about Mathematics: The Philosophy of Mathematics*. New York: Oxford University Press.