MODUL 1

Analisis Vektor

Paken Pandiangan, S.Si., M.Si.

PENDAHULUAN

Analisis vektor mulai dikembangkan pada pertengahan abad ke−19. Pada saat ini merupakan bagian yang sangat penting bagi mereka yang mendalami ilmu matematika dan ilmu pengetahuan alam, utamanya ilmu fisika. Persyaratan ini bukanlah suatu kebetulan karena analisis vektor tidak hanya memberikan notasi yang ringkas untuk memperkenalkan dari persamaan–persamaan yang muncul dalam perumusan matematis persoalan–persoalan fisika dan geometri, tetapi juga merupakan suatu alat bantu dalam membentuk gambaran dari ide dan gagasan yang berhubungan dengan fisika yang dapat dipandang sebagai bahasa dan cara berpikir yang sangat bermanfaat untuk ilmu fisika.

Modul ini terdiri dari 2 (dua) kegiatan belajar. Kegiatan Belajar 1 adalah Diferensial Fungsi Vektor yang membahas tentang skalar dan vektor, vektor dan sistem koordinat, fungsi vektor, dan diferensiasi fungsi vektor. Sedangkan Kegiatan Belajar 2 adalah Medan Vektor yang membahas tentang medan skalar dan vektor, gradien dari medan skalar, divergensi dan Curl, dan integral vektor.

Secara umum kompetensi dari pembelajaran ini adalah mahasiswa dapat menerapkan analisis vektor dalam berbagai persoalan fisika. Secara khusus lagi kompetensi dari pembelajaran ini adalah mahasiswa dapat:

1. menerapkan pengertian skalar dan vektor;
2. menerapkan sistem koordinat dalam persoalan fisika;
3. menerapkan fungsi vektor;
4. menerapkan diferensiasi fungsi vektor dalam persamaan diferensial;
5. menjelaskan pengertian medan skalar dan medan vektor;
6. menghitung gradien dari medan skalar;
7. menghitung diferensiasi dan curl dari suatu fungsi;
8. menghitung integral vektor dari suatu besaran fisis.

Masing–masing kegiatan belajar dari modul ini akan dimulai dengan penjelasan definisi, formulasi, teorema bersama dengan ilustrasi dan bahan–bahan deskriptif lainnya. Di akhir dari setiap sajian materi akan diberikan contoh dengan harapan agar mahasiswa dapat memahami materi yang diberikan secara mendalam. Pada bagian akhir dari tiap kegiatan belajar akan diberikan rangkuman, latihan, dan tes formatif. Diberikan juga petunjuk jawaban latihan dan tes formatif.

Untuk membantu mahasiswa memperjelas dan memperdalam penguasaan teori dan mempertajam bagian–bagian penting tertentu yang tanpa itu para mahasiswa akan terus–menerus merasa dirinya kurang mempunyai dasar yang kuat serta menyajikan ulangan prinsip–prinsip dasar yang sangat penting untuk belajar secara efektif. Glosarium yang terdapat pada bagian akhir Kegiatan Belajar 2 dimaksudkan agar mahasiswa lebih cepat memahami beberapa istilah yang mungkin sebelumnya masih terasa asing baginya.

Agar Anda berhasil dalam pembelajaran ini maka pelajarilah seluruh isi modul ini secara sungguh–sungguh. Kerjakanlah sendiri soal–soal latihan dan tes formatif yang diberikan tanpa melihat terlebih dahulu petunjuk jawabannya.

Selamat belajar, semoga Anda berhasil!

KEGIATAN BELAJAR 1

Diferensial Fungsi Vektor

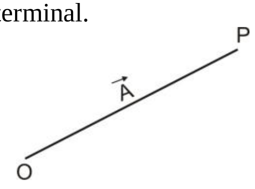
A. SKALAR DAN VEKTOR

Untuk mempelajari suatu peristiwa alam dari segi fisika, objek kajiannya kita pandang sebagai suatu sistem terpisah yang dicirikan oleh sejumlah besaran fisis yang terukur, misalnya panjang, massa, waktu, kecepatan, percepatan, gaya, energi, dan besaran–besaran fisis lainnya. Besaran–besaran fisis inilah pembentuk utama kajian fisika. Dengan menyatakannya dalam besaran matematika yang sesuai dan melakukan analisis matematis terhadap kaitan besaran–besaran tersebut, akan diperoleh pemahaman teoretis yang mendalam mengenai perilaku fisika sistem yang dikaji.

Skalar adalah suatu besaran yang secara lengkap ditentukan oleh besaran dan tandanya, tetapi tidak memiliki arah. Contoh skalar pada besaran fisis adalah panjang, massa, waktu, suhu, energi, dan sebarang bilangan real. Skalar dinyatakan oleh huruf–huruf biasa seperti dalam aljabar elementer, sedangkan operasi–operasi dalam skalar mengikuti aturan–aturan yang berlaku pada aljabar bilangan real biasa.

Berbeda dari skalar, *besaran vektor* selain ditentukan oleh besarnya juga oleh arahnya, seperti perpindahan, kecepatan, percepatan, gaya, dan kuat medan listrik. Besaran vektor dapat dinyatakan dengan lambang huruf tebal **A** atau huruf tipis biasa dengan tanda panah di atasnya seperti $\vec{A}$, dan besarnya dinyatakan oleh $|\vec{A}|$.

Secara grafis, vektor digambarkan oleh sebuah anak panah yang mendefinisikan arahnya, sedangkan arahnya dinyatakan oleh panjang anak panah. Gambar 1.1 berikut ini adalah sebuah vektor $\vec{A}$ yang melukiskan titik tangkap O, dan P sebagai terminal.



Gambar 1.1. Vektor $\vec{A}$ dengan titik tangkap O, dan terminal P.

Arah panah menunjukkan arahnya vektor, sedangkan panjang panah tersebut menyatakan besarnya. Ekor panah dinamakan titik tangkap vektor, sedangkan ujungnya dinamakan titik terminal. Jika O adalah titik tangkap vektor dan P adalah titik terminal vektor maka vektor tersebut dapat dinyatakan sebagai $\overrightarrow{OP}$. Sedangkan garis yang berimpit dengan panjang vektor disebut dengan *garis kerja* vektor $\overrightarrow{OP}$.

Vektor–vektor yang panjang dan arahnya sama dinamakan setara maka vektor–vektor setara dianggap sama walaupun titik tangkapnya masing–masing tidak sama. Jika vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ setara maka dapat dituliskan

$$\vec{A} = \vec{B} \qquad (1.1)$$

Jadi, setiap vektor $\vec{A}$ tidak berubah nilainya secara vektor apabila ia digeser sepanjang garis kerjanya. Pergeseran vektor ini dinamakan *pergeseran sejajar*.

Contoh:

Apabila diberikan vektor $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + k$ maka tentukanlah besarnya vektor $\vec{A}$.

Penyelesaian:

Bila vektor $\vec{A} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ maka besarnya vektor $\vec{A}$ dapat dihitung dengan formulasi $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Dalam hal soal di atas maka $\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{6}$

Jadi, besarnya vektor $\vec{A}$ adalah $\sqrt{6}$.

1. Penjumlahan dan Pengurangan Vektor

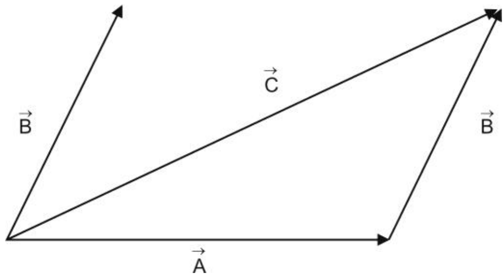
Jika $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah dua buah vektor sebarang maka jumlah kedua vektor tersebut dapat dirumuskan sebagai:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{C} \qquad (1.2)$$

Cara melukiskan vektor $\vec{C}$ secara geometris adalah sebagai berikut.

1. Impitkan titik tangkap kedua vektor secara pergeseran sejajar.

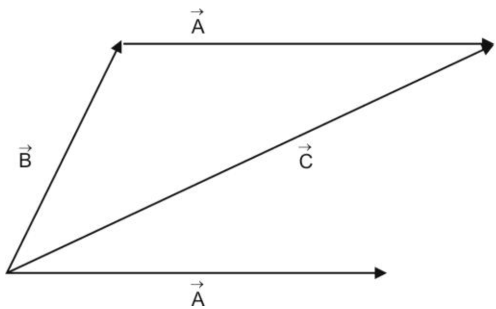
2. Gambarkan vektor setara $\vec{B}$ yang titik tangkapnya pada titik terminal $\vec{A}$.
3. Panah dari titik tangkap $\vec{A}$ ke titik terminal vektor setara $\vec{B}$ pada (2) adalah vektor jumlah $\vec{C} = \vec{A} + \vec{B}$ seperti yang diperlihatkan pada Gambar 1.2 berikut ini.



Gambar 1.2. Penjumlahan vektor $\vec{A} + \vec{B} = \vec{C}$.

Vektor $\vec{C}$ dapat juga dilukiskan dengan cara mengganti langkah (2) dan (3), yaitu:

1. Menggambarkan vektor setara $\vec{A}$ yang titik tangkapnya pada titik terminal $\vec{B}$.
2. Panah dari titik tangkap $\vec{B}$ ke titik terminal vektor setara $\vec{A}$ pada (1) adalah merupakan vektor jumlah $\vec{B} + \vec{A}$ seperti yang dilukiskan pada Gambar 1.3 berikut ini.



Gambar 1.3. Penjumlahan vektor $\vec{C} = \vec{B} + \vec{A}$.

Vektor $\vec{C}$ ini disebut dengan *vektor resultan* yang berimpit dengan diagonal jajaran genjang yang dibentuk oleh vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$. Oleh karena itu, cara penjumlahan yang demikian dikenal dengan metode *jajaran genjang*.

Perhatikan bahwa melalui kedua cara penentuan vektor resultan $\vec{C}$ tersebut, terlihat bahwa penjumlahan vektor bersifat kumulatif, yang berarti:

$$\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A} \tag{1.3}$$

Misalkan bila diberikan vektor $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ dan $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ maka $\vec{A}+\vec{B} = (a_x + b_x)\hat{i} + (a_y + b_y)\hat{j} + (a_z + b_z)\hat{k}$ dan $\vec{A}-\vec{B} = (a_x - b_x)\hat{i} + (a_y - b_y)\hat{j} + (a_z - b_z)\hat{k}$.

Contoh:

Diberikan dua buah vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ masing–masing adalah $2\hat{i} + 3\hat{j} - k$ dan $3\hat{i} - 4\hat{j} + 2k$ tentukanlah besarnya:

a. penjumlahan vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.
b. pengurangan vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.

Penyelesaian:

a. $\vec{A}+\vec{B} = (2+3)\hat{i} + (3-4)\hat{j} + (-1+2)k$

$= 5\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$

Jadi besarnya penjumlahan vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah

$$\left|\vec{A}+\vec{B}\right| = \sqrt{(5)^2 + (-1)^2 + (1)^2} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}.$$

b. $\vec{A}-\vec{B} = (2-3)\hat{i} + (3-(-4))\hat{j} + (-1-2)k$

$= -\hat{i} + 7\hat{j} - 3\hat{k}$

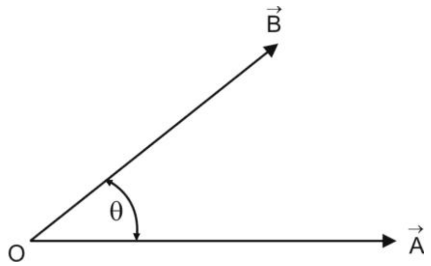
Jadi besarnya pengurangan antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah

$$\left|\vec{A}-\vec{B}\right| = \sqrt{(-1)^2 + (7)^2 + (-3)^2} = \sqrt{59}.$$

2. Perkalian Skalar Dua Vektor

Jika $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah dua buah vektor yang mengapit sudut maka hasil kali titik (skalar) dua vektor $\vec{A}$. $\vec{B}$ didefinisikan sebagai:

$$\vec{A}.\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta \tag{1.4}$$



Gambar 1.4. Perkalian titik dua buah vektor.

Karena $|\vec{A}|$ dan $|\vec{B}|$ berarti skalar maka ruas kanan pada persamaan (1.4) menunjukkan bahwa hasil kali titik bernilai skalar pula. Oleh karena itu, hasil kali titik dua buah vektor dikenal dengan nama **hasil kali skalar**.

Perhatikan pula karena $\vec{A}.\vec{B}\cos\theta = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$ maka berlaku hubungan *komutatif* pada perkalian titik dua vektor.

$$\vec{A} \;.\; \vec{B} \;=\; \vec{B} \;.\; \vec{A} \tag{1.5}$$

Apabila perkalian titik dua vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ berharga nol maka kedua vektor tersebut dikatakan saling tegak lurus (ortogonal). Selain sifat komutatif perkalian titik juga memenuhi sifat distributif, yaitu:

$$\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\cdot\vec{C} = \vec{A}\cdot\vec{C}+\vec{B}\cdot\vec{C} \tag{1.6}$$

Untuk mengungkapkan hasil kali secara analitik, yaitu dalam bentuk komponen–komponen vektornya, terlebih dahulu diturunkan hubungan hasil kali titik antara ketiga vektor basis $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$. Ketiga vektor basis ini saling ortogonal dan besarnya masing–masing adalah satu dan berlaku sifat sebagai berikut.

$$\hat{i}\cdot\hat{i} = \hat{j}\cdot\hat{j} = \hat{k}\cdot\hat{k} = 1 \text{ dan } \hat{i}\cdot\hat{j} = \hat{j}\cdot\hat{k} = \hat{k}\cdot\hat{i} = 0 \tag{1.7}$$

Jika $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k}$ dan $\vec{B} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} + b_z\hat{k}$ maka hasil kali titik vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{1.8}$$

atau

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A_i B_j \delta_{ij}, \delta_{ij} = \begin{cases} 1\ ;\ i = j \\ 0\ ;\ i \neq j \end{cases}$$

Contoh:

Diketahui vektor $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - k$ dan $\vec{B} = 2\hat{i} + k + \hat{j}$, hitunglah:

a. $\vec{A}\ .\ \vec{B}$

b. Sudut antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$.

Penyelesaian:

a. $\vec{A}\cdot\vec{B} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = (1)(2) + (2)(1) + (-1)(1) = 3$

b. $\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}\cos\theta|$

$$\cos\theta = \frac{\vec{A}\cdot\vec{B}}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}$$

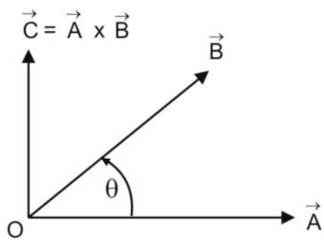
$$\theta = \text{arc.}\cos\left(\tfrac{1}{2}\right) = 60^{o}$$

Jadi sudut antara vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ adalah 60^{o}.

3. Perkalian Silang Dua Buah Vektor

Jika $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah dua buah vektor yang mengapit sudut θ maka perkalian silang antara vektor $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ didefinisikan sebagai:

$$\vec{A}\times\vec{B} = \hat{n}|\vec{A}||\vec{B}|\sin\theta \tag{1.9}$$



Gambar 1.5. Perkalian silang dua buah vektor.

Hasil kali silang antara dua buah vektor adalah bersifat antikomutatif, yaitu:

$$\vec{A}\times\vec{B}=-\vec{B}\times\vec{A} \tag{1.10}$$

Jika $\left|\vec{A}\right|\neq 0$, $\left|\vec{B}\right|\neq 0$, dan $\vec{A}\times\vec{B}=0$ maka sudut $\theta=0$ atau π untuk $\theta=0$ vektor $\vec{A}$ searah dengan vektor $\vec{B}$, sedangkan untuk $\theta=\pi$ vektor $\vec{A}$ berlawanan arah dengan vektor $\vec{B}$. Secara umum vektor $\vec{A}$ sejajar dengan vektor $\vec{B}$ dan vektor $\vec{A}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{C}$, serta vektor $\vec{B}$ tegak lurus dengan vektor $\vec{C}$.

Perkalian silang dua buah vektor memenuhi sifat distributif, yaitu:

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}+\vec{C}\right)=\vec{A}\times\vec{B}+\vec{A}\times\vec{C} \tag{1.11}$$

Sedangkan perkalian dengan suatu skalar s, berlaku:

$$s\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(s\vec{A}\right)\times\vec{B}=\vec{A}\times\left(s\vec{B}\right) \tag{1.12}$$

Untuk vektor–vektor basis $\hat{i},\hat{j},\hat{k}$ berlaku sifat berikut ini.

$$\hat{i}\times\hat{i}=\hat{j}\times\hat{j}=\hat{k}\times\hat{k}=0$$

$$\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k},\ \hat{j}\times\hat{k}=\hat{i},\ \hat{k}\times\hat{i}=\hat{j} \tag{1.13}$$

Dengan memperhatikan persamaan (1.9) sampai dengan persamaan (1.13) maka hasil kali silang antara vektor $\vec{A}$ dan vektor $\vec{B}$ secara analitik dapat dirumuskan sebagai:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}a_z & a_x\\ b_z & b_x\end{vmatrix}$$

$$\vec{A}\times\vec{B}=\hat{i}\left(a_xb_y-a_yb_x\right)-\hat{j}\left(a_xb_z-a_zb_x\right)+\hat{k}\left(a_zb_x-a_xb_z\right) \tag{1.14}$$

Contoh:

Jika diberikan vektor $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ dan vektor $\vec{B}=\hat{i}-\hat{j}+2\hat{k}$ maka hitunglah $\vec{A}\times\vec{B}$.

Penyelesaian:

$$\vec{A}\times\vec{B}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=\hat{i}\begin{vmatrix}1 & 1\\ -1 & 2\end{vmatrix}-\hat{j}\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+\hat{k}\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & -1\end{vmatrix}$$

$$=\hat{i}\{(1)(2)-(1)(-1)\}-\hat{j}\{(2)(2)-(1)(1)\}+\hat{k}\{(2)(-1)-(1)(1)\}$$

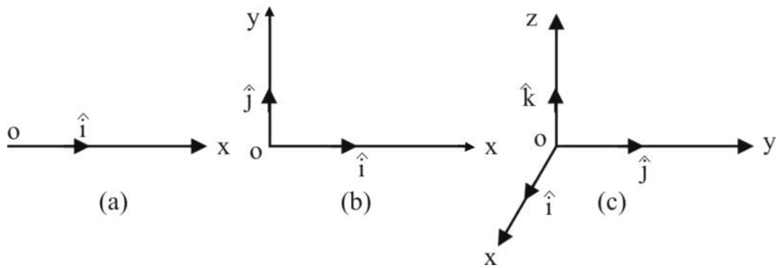
$$=3\hat{i}-3\hat{j}-3\hat{k}.$$

B. VEKTOR DAN SISTEM KOORDINAT

Untuk menentukan posisi suatu benda diperlukan suatu sistem koordinat agar posisi benda tersebut dapat ditentukan secara lebih akurat. Dalam fisika kita mengenal beberapa sistem koordinat, yaitu koordinat Cartesian, koordinat polar, koordinat silinder, dan sistem koordinat bola.

1. Sistem Koordinat Cartesian

Dalam fisika kita sering menggunakan sistem koordinat Cartesian untuk menggambarkan kerangka linear suatu benda (lihat Gambar 1.6).



Gambar 1.6. Sistem koordinat Cartesian:
(a) satu dimensi, (b) dua dimensi, (c) tiga dimensi.

Koordinat Cartesian untuk satu dimensi digambarkan dengan sumbu garis pada arah sumbu X dan diawali oleh vektor basis $\hat{i}$, untuk dua dimensi sumbu X digambarkan dengan garis horizontal dan sumbu Y digambarkan dengan garis vertikal yang diwakili oleh vektor basis $\hat{i}, \hat{j}$. Selanjutnya untuk tiga dimensi sistem koordinat ini ditambah dengan sumbu Z yang tegak lurus pada sumbu X dan sumbu Y dan diwakili oleh vektor basis $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$.

Vektor basis $\hat{i}, \hat{j}$, dan $\hat{k}$ adalah merupakan vektor satuan yang memiliki harga sama dengan satu.

$$\left|\hat{i}\right| = \left|\hat{j}\right| = \left|\hat{k}\right| = 1$$

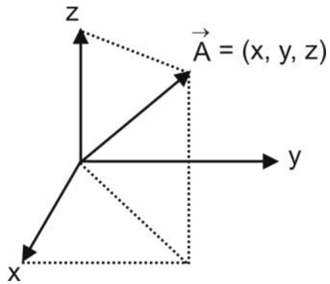
atau

$$\hat{i} = [1, 0, 0],\ \hat{j} = [0, 1, 0],\ \text{dan}\ \hat{k} = [0, 0, 1] \tag{1.14}$$

Letak sebuah vektor $\vec{A}$ yang berada pada sistem koordinat Cartesian dapat dirumuskan sebagai:

$$\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k} \tag{1.15}$$

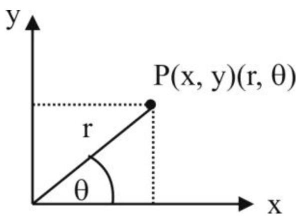
di mana a_x, a_y, dan a_z adalah besar vektor $\vec{A}$ pada arah sumbu X, Y, dan Z.



Gambar 1.7. Vektor dalam sistem koordinat Cartesian.

2. Sistem Koordinat Polar

Sebuah benda yang bergerak pada bidang datar (dua dimensi) dapat digambarkan melalui koordinat Polar. Posisi sebuah titik P(x, y) yang berada pada sistem koordinat Cartesian dapat dinyatakan pada sistem koordinat Polar melalui transformasi koordinat berikut ini.



Gambar 1.8. Koordinat Polar

$$x = r\cos\theta, \;\; y = r\sin\theta \tag{1.16}$$

Kita dapat menyatakan r dan θ dalam komponen x dan y dengan jalan mengkuadratkan x dan y, hasilnya adalah

$$x^2 + y^2 = r^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) = r^2 \tag{1.17}$$

dan

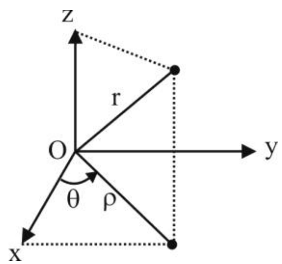
$$\frac{y}{x} = \frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \mathrm{tg}\,\theta \tag{1.18}$$

Dengan demikian besarnya vektor r dan sudutnya adalah

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \;\; \text{dan} \;\; \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.19}$$

3. Sistem Koordinat Silinder

Marilah perhatikan sebuah titik P yang berada sejauh r dari pusat koordinat O. Titik P yang berada sejauh r dari titik pusat O dengan menggunakan koordinat silinder dapat dirumuskan sebagai:



Gambar 1.9. Koordinat Silinder

$$x = \rho \cos \phi$$
$$y = \rho \sin \phi \tag{1.20}$$
$$z = z$$

Di mana

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ dan } \phi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.21}$$

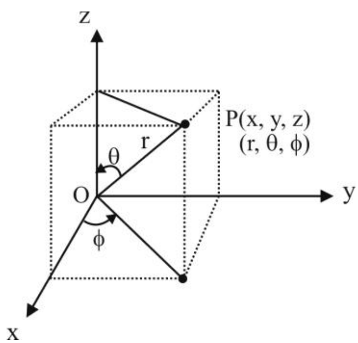
4. Sistem Koordinat Bola

Hubungan antara koordinat Cartesian dengan koordinat bola dapat ditentukan melalui sebuah transformasi koordinat dari titik P(x, y, z) menjadi P(r, θ, ϕ), hasilnya adalah:

$$x = r \sin \theta \cos \phi$$
$$y = r \sin \theta \sin \phi \tag{1.22}$$
$$z = r \cos \theta$$

di mana,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$
$$\tan \theta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$$
$$\tan \phi = \frac{y}{x} \tag{1.23}$$



Gambar 1.10. Koordinat bola.

C. DIFERENSIASI FUNGSI VEKTOR

Sebuah fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dari variabel real t dikatakan memiliki limit ℓ apabila t mendekati t_0.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \ell \tag{1.24}$$

Fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dikatakan kontinu pada t = t_0 apabila fungsi tersebut terdefinisi di sekitar t_0.

$$\lim_{t\to t_0} \vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) \tag{1.25}$$

Dengan menggunakan sistem koordinat Cartesian, vektor $\vec{r}(t)$ dapat dituliskan dalam bentuk:

$$\vec{r}(t) = r_x(t)\hat{i} + r_y(t)\hat{j} + r_z(t)\hat{k} \tag{1.26}$$

Jadi $\vec{r}(t)$ kontinu pada t_0 jika dan hanya jika ketiga fungsi skalar $r_x(t), r_y(t),$ dan $r_z(t)$ kontinu pada t_0.

Bila variabel bebas t dari fungsi vektor $\vec{r}(t)$ berubah sebesar Δt maka fungsi tersebut secara keseluruhan akan berubah baik besarnya maupun arahnya. Untuk perubahan skalar sebesar Δt akan diperoleh perubahan vektor sebesar:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t) = r_x(t+\Delta t)\hat{i} + r_y(t+\Delta t)\hat{j} + r_z(t+\Delta t)\hat{k}$$

atau

$$\Delta\hat{r} = \Delta r_x\hat{i} + \Delta r_y\hat{j} + \Delta a_z\hat{k} \tag{1.27}$$

Sehingga diferensiasi dari fungsi vektor $\vec{r}(t)$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \tag{1.28}$$

Atau bila digunakan persamaan (1.27) maka diferensiasi sebuah vektor $\vec{r}(t)$ dapat didefinisikan sebagai:

$$d\vec{r} = dr_x\hat{i} + dr_y\hat{j} + dr_z\hat{k} \tag{1.29}$$

Misalnya untuk vektor posisi sebuah titik (x, y, z) dari pusat koordinat dinyatakan sebagai:

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k} \tag{1.30}$$

diperoleh

$$d\vec{r}(t) = dx(t)\hat{i} + dy(t)\hat{j} + dz(t)\hat{k} \tag{1.31}$$

Bila t mengalami perubahan maka titik ujung $\vec{r}(t)$ melukiskan suatu kurva di dalam ruang dengan persamaan parameter

$$x = x(t),\quad y = y(t),\quad z = z(t) \tag{1.32}$$

Apabila ia menyatakan variabel waktu maka $\frac{d\vec{r}}{dt}$ adalah merupakan kecepatan $\vec{v}$ dan diferensiasi fungsi $\vec{v}$ terhadap waktu merupakan percepatan $\vec{a}$ sepanjang kurva, ditulis:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt},\quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \tag{1.33}$$

Contoh:

Sebuah benda bergerak sepanjang kurva yang persamaan parameternya adalah $x = e^{-2t}$, $y = 3 \cos 2t$, dan $z = \sin 3t$. Bila t adalah waktu maka tentukanlah kecepatan dan percepatan benda tersebut!

Penyelesaian:

Bila vektor posisi sebuah benda dinyatakan sebagai:

$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}\\ &= e^{-2t}\,\hat{i} + 3\cos 2t\,\hat{j} + \sin 3t\,\hat{k}\end{aligned}$$

Maka

- kecepatan benda tersebut adalah:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$
$$= -2e^{-2t}\,\hat{i} - 6\sin 2t\,\hat{j} + 3\cos 3t\,\hat{k}.$$

- percepatan benda adalah:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4e^{-2t}\,\hat{i} - 12\cos 2t\,\hat{j} - 9\sin 3t\,\hat{k}.$$

Jika vektor $\vec{A}, \vec{B},$ dan $\vec{C}$ adalah fungsi-fungsi vektor dari sebuah skalar t yang terdefinisi, dan sebuah fungsi skalar dari t yang terdefinisi maka akan berlaku formulasi berikut ini.

$$\begin{aligned}
&1.\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}\\
&2.\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt}\\
&3.\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}\\
&4.\ \frac{d}{dt}\left(S\vec{A}\right) = \frac{dS}{dt}\vec{A} + S\frac{d\vec{A}}{dt}\\
&5.\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B} \times \vec{C}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} \times \vec{C} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C} + \vec{A}.\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}\\
&6.\ \frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B} \times \vec{C}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) + \vec{A} \times \left(\frac{d\vec{B}}{dt} \times \vec{C}\right) + \vec{A} \times \left(\vec{B} \times \frac{d\vec{C}}{dt}\right)
\end{aligned} \tag{1.34}$$

Selanjutnya jika vektor $\vec{A}$ adalah sebuah vektor $\vec{A}$ yang bergantung pada lebih dari satu variabel skalar (misalnya x, y, z) maka vektor $\vec{A}$ dapat dituliskan $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$. Turunan parsial dari vektor $\vec{A}$ terhadap x, y, dan z dapat didefinisikan sebagai:

$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\vec{A}(x+\Delta x, y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta x}$$
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\vec{A}(x, y+\Delta y, z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta y} \qquad (1.35)$$
$$\frac{\partial \vec{A}}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\vec{A}(x, y, z+\Delta z) - \vec{A}(x, y, z)}{\Delta z}$$

Turunan-turunan yang lebih tinggi dapat ditentukan dengan formulasi berikut ini.

$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right)$$
$$(1.36)$$
$$\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z}\right), \frac{\partial^3 \vec{A}}{\partial y \partial z^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial z^2}\right)$$

Bila vektor $\vec{A}$ merupakan fungsi dari x, y, dan z maka

$$d\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} dx + \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} dy + \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} dz \qquad (1.37)$$

Contoh:

Jika diberikan vektor $\vec{A} = 5t^2\,\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\,\hat{k}$ dan $\vec{B} = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$ maka tentukanlah $\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)$!

Penyelesaian:

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = 10\,t\,\hat{i} + \hat{j} - 3t^2\,\hat{k}, \quad \frac{d\vec{B}}{dt} = \cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) &= \frac{d\vec{A}}{dt}.\vec{B} + \vec{A}.\frac{d\vec{B}}{dt} \\
&= \left(10\,t\,\hat{i} + \hat{j} - 3t^2\,\hat{k}\right).\left(\sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}\right) + \left(5t^2\,\hat{i} + t\,\hat{j} - t^3\hat{k}\right).\left(\cos t\,\hat{i} + \sin t\,\hat{j}\right) \\
&= 10t\sin t - \cos t + 5t^2\cos t + t\sin t \\
&= 11t\sin t + \left(5t^2 - 1\right)\cos t.
\end{aligned}$$

Anda dapat juga menghitung $\vec{A}.\vec{B}$ terlebih dahulu, lalu hasilnya didiferensialkan terhadap waktu. Cobalah, hasilnya pasti akan sama!

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui $\vec{A} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{B} = 2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}$, dan $\vec{C} = -\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ hitunglah besarnya:
   a) $\vec{B} + \vec{A}$
   b) $2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C}$.

2) Jika $\vec{p} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{q} = \hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}$, $\vec{r} = -2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$, dan $\vec{s} = 3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k}$ maka tentukanlah skalar a, b, c agar dipenuhi persamaan $\vec{s} = a\vec{p} + b\vec{q} + c\vec{r}$.

3) Diberikan vektor $\vec{a} = \hat{i} + 3\hat{j} + 2\hat{k}$, $\vec{b} = -\hat{j} + 4\hat{k}$, dan $\vec{c} = 3\hat{i} - 4\hat{j} - \hat{k}$, carilah:
   a) $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.
   b) $\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right)$.

4) Sebuah partikel bergerak sepanjang kurva $\vec{x} = 2t^2$, $\vec{y} = t^2$, dan $\vec{z} = 3t - 5$. Hitunglah:
   a) kecepatan partikel pada saat t = 1.
   b) percepatan partikel pada saat t = 3.

5) Jika $\vec{r}_1 = 5t^2\hat{i} + t\hat{j} - t^3\hat{k}$ dan $\vec{r}_2 = \sin t\,\hat{i} - \cos t\,\hat{j}$, tentukanlah $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right)$!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) $\vec{B} + \vec{A} = 5\hat{i} - 6\hat{j} + 2\hat{k}$, besarnya adalah $\left|\vec{B} + \vec{A}\right| = \sqrt{25 + 36 + 4} = \sqrt{65.}$
   b) $2\vec{A} - 3\vec{B} - 5\vec{C} = 2\left(3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}\right) - 3\left(2\hat{i} - 4\hat{j} - 3\hat{k}\right) - 5\left(-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$
   $$= 5\hat{i} - 2\hat{j} + k$$
   Besar vektornya adalah $\sqrt{25 + 4 + 1} = \sqrt{30}$.

2) Agar persamaan $\vec{s} = a\vec{p} + b\vec{q} + c\vec{r}$ dipenuhi maka

$$3\hat{i} + 2\hat{j} + 5\hat{k} = a\left(2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}\right) + b\left(\hat{i} + 3\hat{j} - 2\hat{k}\right) + c\left(-2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}\right)$$

$$= \left(2a + b - 2c\right)\hat{i} + \left(-a + 3b + c\right)\hat{j} + \left(a - 2b - 3c\right)\hat{k}$$

Dari persamaan tersebut terlihat bahwa:
2a + b – 2c = 3; -a + 3b + c = 2; dan a – 2b – 3c = 5.
Melalui cara eliminasi atau substitusi diperoleh:
a = -2, b = 1, dan c = -3.
Sehingga persamaan vektor $\vec{s}$ menjadi $\vec{s} = -2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$.

3) a) Gunakan persamaan $\vec{a}.\left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a}.\vec{b} + \vec{a}.\vec{c}$ dan hasilnya adalah 0.

b) Gunakan persamaan $\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ hasilnya adalah $a_1\left(b_2c_3 - c_2b_3\right) + a_2\left(b_3c_1 - c_3b_1\right) + a_3\left(b_1c_2 - c_1b_2\right)$ jika harga-harga komponen $\vec{a}$, $\vec{b}$, dan $\vec{c}$ dimasukkan maka hasilnya adalah: $\vec{a}.\left(\vec{b} \times \vec{c}\right) = 57$.

4) a) Gunakan persamaan $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ di mana $\vec{r} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z}$ masukkan harga t = 1, dan hasilnya adalah: $\vec{v} = 4\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

b) Percepatan adalah turunan pertama dari kecepatan $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$ karena tidak mengandung unsur t maka pada saat t = 2 percepatan partikel tersebut adalah $\vec{a} = 4\hat{i} + 2\hat{j}$.

5) Carilah terlebih dahulu $\vec{r}_1 \times \vec{r}_2$, lalu hasilnya didiferensialkan terhadap t sehingga diperoleh:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right) = \left(t^3 \sin t - 3t^2 \cos t\right)\hat{i} - \left(t^3 \cos t + 3t^2 \sin t\right)\hat{j}$$

$$+ \left(5t^2 \sin t - \sin t - 11t \cos t\right)\hat{k}$$

atau Anda dapat menggunakan rumus berikut ini.

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 \times \vec{r}_2\right) = \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} + \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2$$

Cobalah hasilnya pasti akan sama.

RANGKUMAN

1. Skalar adalah suatu besaran yang secara lengkap ditentukan oleh besarnya saja, tetapi tidak memiliki arah. Sedangkan besaran vektor di samping memiliki besar (nilai) juga memiliki arah.
2. Penjumlahan dan pengurangan vektor bersifat komutatif
   $\vec{A} \pm \vec{B} = \pm\vec{B} + \vec{A}.$
3. Perkalian skalar dua buah vektor memenuhi persamaan:
   $\vec{A}.\vec{B} = \vec{B}.\vec{A} = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\cos\theta$
   $\vec{A}.\vec{B} = A_i\ B_j\ \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1;\ i = j \\ 0;\ i \neq j \end{cases}$
4. Perkalian silang dua buah vektor memenuhi persamaan:
   $\vec{A} \times \vec{B} = \hat{n}\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin\theta;\ \hat{n} = \text{vektor satuan}$
   $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}.$
5. Perkalian silang dua buah vektor memenuhi sifat distributif:
   $\vec{A} \times \left(\vec{B} + \vec{C}\right) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}.$
6. Sistem koordinat Cartesian
   $\vec{A} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} + a_z\hat{k};\ \hat{i}, \hat{j}$ dan $\hat{k}$ adalah vektor satuan.
7. Sistem koordinat polar
   $x = r\cos\theta$ dan $y = r\sin\theta;\ r^2 = x^2 + y^2;\ \tan\theta = \dfrac{y}{x}.$
8. Sistem koordinat silinder
   $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\sin\phi,$ dan $z = z.$
9. Sistem koordinat bola
   $x = r\sin\theta\cos\phi$
   $y = r\sin\theta\sin\phi$
   $z = r\cos\theta$
   $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ dan $\tan\theta = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z},\ \tan\phi = \dfrac{y}{x}.$

10. Diferensiasi fungsi vektor

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \pm \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \pm \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} . \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} . \vec{B} + \vec{A} . \frac{d\vec{B}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Diketahui $\vec{C} = 2\vec{A} + \vec{B}$, hitunglah besarnya vektor $\vec{C}$ bila diketahui $\vec{A} = 3\hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}$.
   A. 3
   B. 7
   C. $\sqrt{47}$
   D. $\sqrt{51}$

2) Jika $\vec{a} = 2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{b} = \hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$, $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, dan $\vec{d} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ maka skalar p agar memenuhi persamaan $\vec{a} = p\vec{a} - 2\vec{b} + r\vec{c}$ secara berturut-turut adalah ….
   A. $\frac{-2}{11}, \frac{6}{11}$, dan $\frac{21}{11}$
   B. $\frac{-6}{11}, \frac{-2}{11}$, dan $\frac{21}{11}$
   C. $\frac{11}{2}, \frac{-11}{6}$, dan $\frac{21}{11}$
   D. $\frac{-11}{6}, \frac{-11}{2}$, dan $\frac{11}{21}$

3) Hitunglah $2\vec{p} + \vec{q} - 3\vec{r}$ apabila diketahui $\vec{p} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k}$, $\vec{q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}$, $\vec{r} = \hat{j} + \hat{k}$.
   A. $2\hat{i} - 2\hat{j} + 4\hat{k}$
   B. $2\hat{i} + 8\hat{j} - 4\hat{k}$

C. $6\hat{i}-8\hat{j}-4\hat{k}$

D. $6\hat{i}+2\hat{j}+4\hat{k}$

4) Diketahui vektor $\vec{A}=\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ dan $\vec{B}=5\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}$. Hitunglah hasil kali titik kedua vektor tersebut!
A. 2
B. 3
C. 7
D. 11

5) Tentukanlah sudut apit antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ bila diberikan $\vec{a}=2\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$ dan $\vec{b}=\hat{i}+\hat{j}+2\hat{k}$.
A. 30^{o}
B. 45^{o}
C. 60^{o}
D. 90^{o}

6) Carilah sebuah vektor dengan besar 3 satuan yang tegak lurus pada vektor $\vec{A}=2\hat{i}+\hat{j}+3\hat{k}$ dan $\vec{B}=\hat{i}-2\hat{j}+\hat{k}$.
A. $\sqrt{2}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$
B. $\sqrt{3}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$
C. $\sqrt{5}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$
D. $\sqrt{7}\left(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}\right)$

7) Diketahui vektor $\vec{u}=a\hat{i}-2\hat{j}+3\hat{k}$ dan $\vec{v}=4\hat{i}+\hat{j}-2\hat{k}$. Tentukanlah harga a agar $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ saling tegak lurus!
A. 2
B. 3
C. 4
D. 6

8) Tentukanlah harga dari $\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c}$ apabila $\vec{a}=\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$, $\vec{b}=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}$, dan $\vec{c}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}$.
   A. 1
   B. 2
   C. 3
   D. 4

9) Bila diberikan vektor $\vec{p}(t)=3t^2\hat{i}-(t+4)\hat{j}+(t^2-2t)\hat{k}$ dan $\vec{q}(t)=\sin t\,\hat{i}+3e^{-t}\hat{j}-3\cos t\,\hat{k}$ maka hitunglah $\frac{d^2}{dt^2}(\vec{p}\times\vec{q})$ pada saat t = 0.
   A. $-6\hat{i}+18\hat{j}+20\hat{k}$
   B. $-12\hat{i}+10\hat{j}-8\hat{k}$
   C. $4\hat{i}-18\hat{j}-6\hat{k}$
   D. $12\hat{i}+18\hat{j}-10\hat{k}$

10) Diberikan sebuah fungsi skalar $\phi(x,y,z)=xy^2z$ dan vektor $\vec{A}=xz\,\hat{i}-xy^2\,\hat{j}+yz^2\,\hat{k}$. Hitunglah $\frac{\partial^3}{\partial x^2\partial z}(\phi\vec{A})$!
   A. $x^2y^2z^2\,\hat{i}-x^2y^4z\,\hat{j}+xy^3z^3\,\hat{k}$
   B. $4xy^2z\,\hat{i}-2xy^4\,\hat{j}+3y^3z^2\,\hat{k}$
   C. $2x^2y^2z\,\hat{i}+3xy^3z^2\,\hat{k}$
   D. $4y^2z\,\hat{i}-2y^4\,\hat{j}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}}\times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan:	90 - 100%	= baik sekali
	80 - 89%	= baik
	70 - 79%	= cukup
	< 70%	= kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Medan Vektor

A. MEDAN SKALAR DAN MEDAN VEKTOR

Secara umum, nilai berbagai besaran fisika tidaklah sama pada titik yang berbeda di dalam ruang, misalnya suhu yang dekat dengan sumber panas selalu lebih besar bila dibandingkan dengan yang jauh dari sumber panas. Begitu pula besar dan arah kecepatan aliran fluida dalam sebuah pipa yang melengkung yang luas penampangnya berubah-ubah, pasti akan berbeda dalam berbagai titik sepanjang pipa.

Medan skalar dan medan vektor masing-masing dapat didefinisikan sebagai berikut.

Jika pada setiap titik P(x, y, z) dari suatu daerah D dalam ruang dikaitkan:

1. Sebuah skalar ϕ maka fungsi skalar $\phi(x, y, z)$ mendefinisikan sebuah medan skalar dalam daerah D.
2. Sebuah vektor $\vec{F}$ maka fungsi vektor $\vec{F}(x,y,z)$ mendefinisikan sebuah medan vektor dalam daerah D dalam komponen

$$\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{j} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k} \tag{1.38}$$

Perlu diingat bahwa $\vec{F}$ hanya bergantung pada titik-titik daerah asal definisinya, dan pada sebarang titik sedemikian rupa sehingga mendefinisikan vektor yang sama untuk setiap pilihan sistem koordinat.

Medan skalar $\phi(x, y, z)$ dan medan vektor $\vec{F}(x,y,z)$ biasanya disingkat dengan notasi $\phi(\vec{r})$ dan $\vec{F}(\vec{r})$.

Sebagai contoh, yang merupakan medan skalar adalah suhu T di dalam benda logam. Fungsi T dapat bergantung pada waktu, luas permukaan, ataupun parameter lainnya. Contoh medan skalar lainnya adalah tekanan di dalam daerah yang dialiri oleh fluida yang termampatkan.

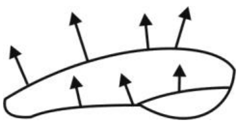
Sedangkan contoh medan vektor adalah kecepatan aliran fluida $\vec{v}$ pada setiap titik (x, y, z) dalam fluida, mendefinisikan sebuah medan skalar $\vec{v}(x,y,z)$. Contoh medan vektor lainnya adalah medan elektrostatik

$\vec{E}(x,y,z) = xz\,\hat{i} - xy^2\,\hat{j} + y^3z\,\hat{k}$ mendefinisikan sebuah medan vektor dalam ruang. Dalam hal ini, ketiga komponennya adalah:

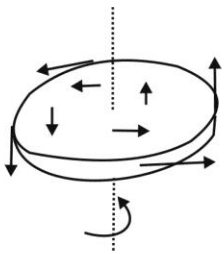
$$E_x(x,y,z) = xz,\ E_y(x,y,z) = -xy^2,\ \text{dan } E_z(x,y,z) = y^3z$$

Untuk memperjelas pemahaman Anda terhadap medan skalar dan medan vektor perhatikan gambar berikut ini.

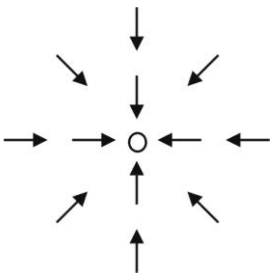
Gambar 1.11. Medan vektor singgung suatu kurva



Gambar 1.12. Medan vektor normal suatu permukaan



Gambar 1.13. Medan perambatan medan berputar



Gambar 1.14. Medan gravitasi

Contoh:

Sebuah benda A dengan massa M berada pada titik tetap b, dan sebuah benda B dengan massa m bebas mengambil posisi pada titik P di dalam ruang. Jika benda A menarik benda B, menurut hukum gravitasi Newton maka gaya gravitasi $\vec{F}$ akan diarahkan dari titik P ke titik P_0 dan besarnya berbanding lurus dengan $\frac{1}{r^2}$ dengan r adalah jarak antara P dan P_0. Tentukanlah fungsi vektor $\vec{F}$ yang menggambarkan gaya gravitasi yang sedang bekerja pada benda B.

Penyelesaian:

Misalkan fungsi vektor $\vec{F}$ memenuhi persamaan $\left|\vec{F}\right| = \dfrac{c}{r^2},\ c = GMm$, dengan G = $6{,}67.10^{-12} Nm^2kg^{-2}$ (konstanta gravitasi), sehingga vektor $\vec{F}$ akan menentukan medan vektor di dalam ruang.

Jika digunakan koordinat Cartesian sedemikian rupa sehingga koordinat P_0 adalah x_0, y_0, z_0 dan koordinat P adalah x, y, z maka jarak antara titik P dan P_0 adalah:

$$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2;\quad r \geq 0$$

Dalam bentuk vektor, jarak antara titik P dan P_0 dapat dituliskan sebagai:

$$\vec{r} = (x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}$$

Bila $\left|\vec{r}\right| = r$ dan $\left(-\frac{1}{r}\right)\vec{r}$ adalah vektor satuan dalam arah gaya $\vec{F}$ maka fungsi vektor $\vec{F}$ yang menggambarkan gaya gravitasi yang sedang bekerja pada benda B adalah:

$$\vec{F} = \left|\vec{F}\right|\left(-\frac{1}{r}\vec{r}\right) = -\frac{c}{r^3}\vec{r} = \frac{-c}{r^3}\left[(x - x_0)\hat{i} + (y - y_0)\hat{j} + (z - z_0)\hat{k}\right]$$

B. GRADIEN MEDAN SKALAR

Operator diferensial vektor "Del" dituliskan $\vec{\nabla}$, didefinisikan sebagai:

$$\vec{\nabla} = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{1.39}$$

Operator $\vec{\nabla}$ juga dikenal sebagai "nabla" yang sifat-sifatnya sama dengan vektor-vektor biasa dan dapat digunakan untuk mendefinisikan tiga buah besaran: 1) gradien; 2) divergensi; dan 3) Curl atau rotasi.

Misalkan $\phi(x, y, z)$ adalah suatu fungsi skalar dan diferensiabel pada setiap titik (x, y, z) dalam suatu ruang tertentu maka gradien ϕ (grad ϕ) didefinisikan oleh:

$$\vec{\nabla}\phi = \text{grad}\,\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} \tag{1.40}$$

Jika $d\vec{r}$ adalah diferensial vektor kedudukan sepanjang kurva C, $\vec{r} = \vec{r}(t)$ maka

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial t}dt = \vec{v}\,dt \;\text{ dan }\; ds = |\vec{v}|\,dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} \tag{1.41}$$

adalah diferensial panjang dari kurva C. Jika s diambil sebagai parameter kurva C maka:

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{1}{|\vec{v}|}\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \hat{v} \tag{1.42}$$

adalah vektor singgung satuan dari kurva C.

Selanjutnya didefinisikan turunan arah medan skalar dalam arah $\vec{v}$ sebagai:

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi.\vec{v} \tag{1.43}$$

Dengan $\hat{v}$ adalah vektor satuan dalam arah $\vec{v}$ yang secara fisika $\frac{d\phi}{ds}$ menyatakan laju perubahan medan skalar ϕ dalam arah $\vec{v}$.

Contoh:

Diberikan fungsi skalar $\phi = xy^2 + yz^3$ tentukanlah:

1. gradien medan skalar ϕ dan
2. turunan arah medan skalar ϕ dalam arah vektor $\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$ di titik (2, -1, 1).

Penyelesaian:

1. Gradien medan skalar ϕ

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z} = \hat{i}\left(y^2\right) + \hat{j}\left(2xy + z^3\right) + \hat{k}\left(3yz^2\right)$$

2. Turunan arah medan skalar $\phi\left(\frac{d\phi}{ds}\right)$ dapat dicari melalui:

$$|\vec{v}| = \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3$$

$$\hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \frac{1}{3}\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi.\hat{v} = \left\{\hat{i}\left(y^2\right) + \hat{j}\left(2xy + z^3\right) + \hat{k}\left(3yz^2\right)\right\}.\left\{\frac{1}{3}\left(\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}\right)\right\}$$

$$= \frac{1}{3}y^2 + \frac{4}{3}xy + \frac{2}{3}z^3 + 2yz^2$$

Jadi $\frac{d\phi}{ds}$ pada titik (2,-1, 1) adalah:

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{3}(-1)^2 + \frac{4}{3}(2)(-1) + \frac{2}{3}(1)^3 + 2(-1)(1)^2 = \frac{-11}{3}.$$

Perhatikan bahwa tanda negatif pada turunan arah medan skalar ϕ mengisyaratkan bahwa nilai ϕ berkurang pada arah $\hat{v}$ tersebut.

Bila $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah fungsi-fungsi vektor yang diferensiabel dan ϕ dan ψ fungsi-fungsi skalar dari kedudukan (x, y, z) yang diferensiabel maka berlaku relasi berikut ini.

1. $\vec{\nabla}\left(\phi + \psi\right) = \vec{\nabla}\phi + \vec{\nabla}\psi$ (1.44)
2. $\vec{\nabla}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A} + \left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B} + \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) + \vec{A}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$ (1.45)
3. $\vec{\nabla}\left(\phi\psi\right) = \varphi\vec{\nabla}\psi + \psi\vec{\nabla}\phi$ (1.46)
4. $\vec{\nabla}\left(\frac{\phi}{\psi}\right) = \frac{\psi\vec{\nabla}\phi - \phi\vec{\nabla}\psi}{\psi^2};\quad \psi \neq 0$ (1.47)

Di dalam fisika besaran medan skalar dan medan vektor selalu berhubungan dengan operator nabla $(\vec{\nabla})$. Misalnya, kuat medan gravitasi $\vec{g}$ dan medan potensial gravitasi ϕ memiliki relasi:

$$\vec{g} = -\vec{\nabla}\phi \tag{1.48}$$

Sedangkan di dalam elektrostatitika ϕ adalah:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{1.49}$$

Bila permukaan ϕ konstan, dinamakan permukaan equipotensial. Garis-garis gaya medan listrik selalu tegak lurus pada permukaan equipotensial.

C. DIVERGENSI DAN CURL

Misalkan $\vec{A} = \hat{i}\,A_x + \hat{j}\,A_y + \hat{k}\,A_z$ terdefinisikan dan terdiferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang maka divergensi dari $\vec{A}$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\text{div}\,\vec{A} = \vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{1.50}$$

Namun karena $\vec{\nabla}$ merupakan operator maka hubungan komunitatif $\vec{\nabla}.\vec{A} = \vec{A}.\vec{\nabla}$ tidaklah berlaku. Ruas kiri adalah suatu medan skalar, sedangkan ruas kanan merupakan operator diferensial baru.

Salah satu cabang ilmu fisika yang banyak memanfaatkan besaran divergensi adalah hidrodinamika dan aerodinamika.

Tinjaulah sebuah fluida dengan rapat massa $\rho(x, y, z; t)$ dan kecepatan fluida $\vec{v}(x, y, z; t)$ yang memberikan rapat arus sebesar:

$$\vec{j} = \rho\vec{v} \tag{1.51}$$

Bila $d\vec{s} = \hat{n}\,ds$ adalah vektor luasan ds pada suatu permukaan bidang yang membentuk sudut ϕ dengan $\vec{v}$ maka jumlah massa fluida per satu satuan waktu yang melalui permukaan ds adalah:

$$\frac{dm}{dt} = \vec{j}.d\vec{s} = \vec{j}.\hat{n}\,ds \tag{1.52}$$

Menurut hukum kekekalan massa, besarnya fluks materi tersisa yang ke luar dari unsur volume ΔV suatu fluida harus sama dengan berkurangnya massa di dalam unsur volume ΔV yang sama dengan laju perubahan rapat massa terhadap waktu $\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)$ dikalikan dengan unsur volume ΔV sehingga berlaku persamaan:

$$\vec{\nabla}.\vec{j} = \frac{-\partial\rho}{\partial t} \tag{1.53}$$

Persamaan ini dikenal dengan persamaan kontinuitas, yang tidak lain merupakan hukum kekekalan massa. Bila di dalam proses aliran tersebut tidak terjadi penambahan ataupun pengurangan materi maka $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ sehingga

$$\vec{\nabla}.\vec{j} = 0 \tag{1.54}$$

Dengan kata lain, bila $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$ maka di dalam proses aliran tersebut tidak terdapat sumber sehingga medan vektor $\vec{j}$ yang memenuhi persamaan (1.54) dinamakan **medan solenoidal**.

Contoh:

Tentukan medan vektor berikut ini bersifat solenoidal atau bukan.

a. $\vec{A} = \hat{i}(4x-2y) + \hat{j}(3y+6z) + \hat{k}(2x+y-7z)$

b. $\vec{B} = \hat{i}\,x^2z - \hat{j}\,2y^3z^2 + \hat{k}\,xy^2z.$

Penyelesaian:

a. medan vektor $\vec{A}$ bersifat solenoidal apabila $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}(4x-2y) + \frac{\partial}{\partial y}(3y+6z) + \frac{\partial}{\partial z}(2x+y-7z)$$

$$= 4 + 3 - 7$$

$$= 0.$$

Jadi medan vektor $\vec{A}$ bersifat solenoidal.

b. $$\vec{\nabla}.\vec{B} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 z\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(-2y^3 z^2\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2 z\right)$$
$$= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2$$
$$\neq 0.$$

Jadi medan vektor tidak bersifat solenoidal.

Bentuk hasil kali vektor antara operator nabla $\vec{\nabla}$ dengan medan vektor $\vec{v}$ dinamakan rotasi (Curl) medan vektor $\vec{v}$. Jadi, jika $\vec{v}(x,y,z)$ adalah sebuah medan vektor diferensiabel maka Curl atau rotasi dari $\vec{v}$ dapat didefinisikan sebagai:

$$\vec{\nabla} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) \tag{1.55}$$

Misalkan, bila $\vec{v}$ adalah medan vektor yang berhubungan dengan aliran fluida maka sebuah roda kecil yang ditentukan di berbagai tempat di dalam medan tersebut akan berputar, asalkan di tempat-tempat tersebut berlaku $\vec{\nabla} \times \vec{v} \neq 0$ Sebaliknya, bila di tempat tersebut berlaku $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ maka roda kecil tersebut tidak akan berputar. Medan vektor $\vec{v}$ yang memiliki sifat $\vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$ dinamakan **medan irrotasional**. Sedangkan medan vektor yang tak irrotasional dinamakan **medan vorteks**.

Contoh:

Selidikilah apakah medan berikut ini merupakan medan irrotasional atau medan vorteks $\vec{A} = \hat{i}\,2xz^2 - \hat{j}\,yz + \hat{k}\,3xz^3$.

Penyelesaian:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(3xz^3\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-yz\right)\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(2xz^2\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(3xz^3\right)\right)$$
$$+ \hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2xz^2\right)\right)$$
$$= \hat{i}\,y + \hat{j}\left(4xz - 3z^3\right).$$

Jadi, medan vektor $\vec{A}$ bukan merupakan medan irrotasional, tetapi merupakan medan vorteks, sebab $\vec{\nabla}\times\vec{A}\neq 0$.

Jika $\vec{A},\vec{B}$ adalah medan vektor diferensiabel dan ϕ,ψ merupakan medan skalar diferensiabel maka dengan menggunakan operator nabla $\vec{\nabla}$ diperoleh relasi sebagai berikut.

1. $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}.\vec{B}\right)=\vec{\nabla}.\vec{A}+\vec{\nabla}.\vec{B}$
2. $\vec{\nabla}.\left(\phi\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}\phi\right).\vec{A}+\phi\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)$
3. $\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\vec{B}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)-\vec{A}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$
4. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right)=\vec{\nabla}\times\vec{A}+\vec{\nabla}\times\vec{B}$
5. $\vec{\nabla}\times\left(\phi\vec{A}\right)=\left(\vec{\nabla}\phi\right)\times\vec{A}+\phi\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$
6. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)=\left(\vec{B}.\vec{\nabla}\right)\vec{A}-\vec{B}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\left(\vec{A}.\vec{\nabla}\right)\vec{B}+\vec{A}\left(\vec{\nabla}.\vec{B}\right)$
7. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\phi\right)=0$
8. $\vec{\nabla}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)$
9. $\vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right)=\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}.\vec{A}\right)-\nabla^2\vec{A}$
10. $\nabla^2=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ disebut operator Laplace.

D. INTEGRAL VEKTOR

1. Integral Vektor Biasa

Misalkan $\vec{A}(t)=A_x(t)\hat{i}+A_y(t)\hat{j}+A_z(t)\hat{k}$ adalah sebuah vektor yang bergantung pada suatu variabel t maka integral tak tentu dari $\vec{A}(t)$ didefinisikan sebagai

$$\int\vec{A}(t)dt=\hat{i}\int A_x(t)dt+\hat{j}\int A_y(t)dt+\hat{k}\int A_z(t)dt \tag{1.56}$$

Bila terdapat sebuah vektor $\vec{B}(t)$ sehingga vektor $\vec{A}(t)=\dfrac{d\vec{B}(t)}{dt}$ maka

$$\int\vec{A}(t)dt=\int\left[\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\right]dt=\int d\vec{B}(t)=\vec{B}(t)+C \tag{1.57}$$

di mana C adalah merupakan konstanta sebarang.

Integral tentu antara limit t = a dan b maka persamaan (1.57) dapat dinyatakan sebagai:

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \int_a^b \left[\frac{d\vec{B}(t)}{dt}\right]dt = \int_a^b d\vec{B}(t) = \vec{B}(b) - \vec{B}(a) \qquad (1.58)$$

Contoh:

Percepatan sebuah benda pada saat t ≥ 0 dapat dinyatakan sebagai $\vec{a}(t) = e^{-t}\hat{i} - 6(t+1)\hat{j} + 3\sin t\,\hat{k}$.

Jika diketahui pada saat t = 0, $\vec{v}(0) = 0$, dan $\vec{r}(0) = 0$ maka hitunglah:

a. kecepatan benda untuk sebarang t.
b. posisi benda untuk sebarang t.

Penyelesaian:

a. Percepatan sebuah benda dapat dirumuskan sebagai:

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \text{ atau } \vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt$$

Jadi kecepatan benda untuk sebarang t adalah:

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \int_0^t \left[\hat{i}\,e^{-t} - \hat{j}6(t+1) + \hat{k}\,3\sin t\right]dt \\ &= \hat{i}\left(-e^{-t}\right)\Big]_0^t - \hat{j}\left(3t^2 + 6t\right)\Big]_0^t + \hat{k}\left(-3\cos t\right)\Big]_0^t \\ &= \hat{i}\left(1 - e^{-t}\right) - \hat{j}\left(3t^2 + 6t\right) + \hat{k}\left(3 - 3\cos t\right).\end{aligned}$$

b. Dengan cara yang sama, posisi benda untuk sebarang t dapat dinyatakan sebagai:

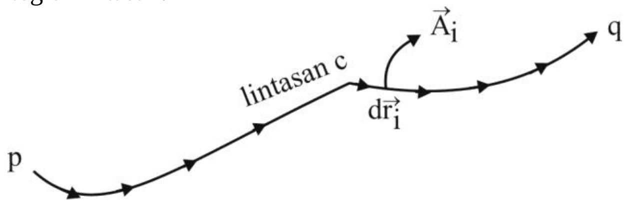
$$\begin{aligned}\vec{r}(t) &= \int_0^t \vec{v}(t)dt \\ &= \hat{i}\int_0^t \left(1 - e^{-t}\right) - \hat{j}\left(t^3 + 3t^2\right) + \hat{k}\left(3t - 3\sin t\right).\end{aligned}$$

2. Integral Lintasan

Bila vektor $\vec{A}$ dan ϕ masing-masing merupakan medan vektor dan medan skalar sebarang di dalam ruang maka bentuk-bentuk integral berikut:

$$\int_p^q \vec{A}.d\vec{r},\ \int_p^q \vec{A}\times d\vec{r},\ \text{dan } \int_p^q \phi d\vec{r} \qquad (1.59)$$

yang dihitung dari titik p ke titik q mengikuti suatu lintasan C dinamakan integral-integral lintasan.



Gambar 1.15. Lintasan benda dari p ke q dibagi menjadi segmen-segmen lintasan $d\vec{r}_i$.

Misalkan $\vec{A}$ merupakan medan vektor di dalam ruang dan $\overrightarrow{pq}$ merupakan kurva lintasan yang berawal di p dan berakhir di titik q. Kurva $\overrightarrow{pq}$ dapat dibagi-bagi menjadi segmen-segmen vektor yang lebih kecil, misalnya $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3, ..., d\vec{r}_i$ dan akan dihitung hasil penjumlahan dari hasil kali skalar $\vec{A}_1.d\vec{r}_1, \vec{A}_2.d\vec{r}_2, \vec{A}_3.d\vec{r}_3, ..., \vec{A}_i.d\vec{r}_i$ dengan $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, ..., \vec{A}_i$ merupakan nilai medan vektor $\vec{A}$ yang diukur di titik-titik simpul dari vektor-vektor $d\vec{r}_1, d\vec{r}_2, d\vec{r}_3, ..., d\vec{r}_i$. Nilai limit hasil penjumlahan tersebut untuk $n \to \infty$ dan $|d\vec{r}_i| \to 0$ adalah:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ |d\vec{r}_i| \to 0}} \sum_{1=i}^{n} \vec{A}_i \, .d\vec{r}_i = \int_p^q \vec{A}.d\vec{r} = \int_C \vec{A}.d\vec{r} \qquad (1.60)$$

Persamaan (1.60) merupakan integral lintasan dari medan vektor $\vec{A}$ sepanjang $\overrightarrow{pq}$ (kurva C) dan berlaku sifat berikut ini.

$$\int_p^q \vec{A}.d\vec{r} = -\int_q^p \vec{A}.d\vec{r} \qquad (1.61)$$

yang memperlihatkan bahwa integral lintasan bergantung pada pemilihan arah lintasan C. Bila diketahui $\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$ dan $d\vec{r} = \hat{i}\, dx + \hat{j} dy + \hat{k} dz$ maka berlaku:

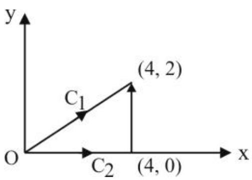
$$\int_C \vec{A}.d\vec{r} = \int_C \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz \right) \qquad (1.62)$$

Bila $\vec{F}$ adalah gaya yang bekerja pada suatu benda bermassa m sehingga bergeser sejauh $d\vec{r}$ maka usaha yang dilakukan oleh gaya $\vec{F}$ tersebut adalah $dw = \vec{F}.d\vec{r}$. Usaha total yang dilakukan oleh gaya tersebut untuk membawa benda dari titik p ke titik q adalah:

$$Wpq = \int_p^q \vec{F}.d\vec{r} = \int_p^q \left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right) \qquad (1.63)$$

Contoh:

Jika $\vec{A} = \left(2xy + 3y^2\right)\hat{i} + \left(x^2 + 2y^2\right)\hat{j}$ maka hitunglah $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ dengan C adalah lintasan yang diberikan oleh:



Penyelesaian:

- Dengan menggunakan lintasan C_1:

$$y = \frac{x}{2},\ dy = \frac{dx}{2}$$

$$Ax = 2xy + 3y^2 = 2x\left(\frac{x}{2}\right) + 3\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{3}{4}x^2 = \frac{7}{4}x^2$$

$$Ay = x^2 + 2y^2 = x^2 + 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 + \frac{2}{4}x^2 = \frac{3}{2}x^2$$

$$\int_{C_1} \vec{A}.d\vec{r} = \int_{x=0}^{4} \left(\frac{7}{4} \times dx + \frac{3}{2}x^2\left(\frac{dx}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{7}{8}x^2 + \frac{1}{4}x^3\right)\Bigg]_0^4$$

$$= \frac{7}{8}(16) + \frac{1}{4}(64)$$

$$= \frac{39}{2}$$

- Dengan menggunakan lintasan C_2:

$$Ax = 2xy + 3y^2 = 2(4)(0) + 3(0^2) = 0$$

$$Ay = x^2 + 2y^2 = 4^2 + 2y^2 = 16 + 2y^2$$

$$\int_{C_2} \vec{A}.d\vec{r} = \int_{x=0}^{4} Ax\,dx + \int_{0}^{4} Aydy$$

$$= 0 + \int_0^4 \left(16 + 2y^2\right) dy$$

$$= \left(16y + \frac{2}{3}y^3\right)\Big]_0^4 = 16(4) + \frac{2}{3}(4^3) = \frac{220}{3}.$$

Terlihat bahwa harga

$$\int_{C_1} \vec{A}.d\vec{r} \neq \int_{C_2} \vec{A}.d\vec{r}.$$

Sehingga integral lintasan dari medan vektor $\vec{A}$ tersebut bergantung pada pemilihan lintasan C. Dalam kondisi seperti ini maka medan vektor $\vec{A}$ disebut **medan vektor non-konservatif**.

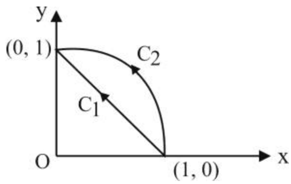
Bila nilai $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ tidak bergantung pada lintasan C yang menghubungkan dua buah titik sebarang di dalam ruang maka medan vektor $\vec{A}$ disebut **medan vektor konservatif**.

Contoh:

Bila sebuah medan vektor $\vec{A}$ memenuhi persamaan:

$$\vec{A} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{x^2 + y^2}$$

Hitunglah $\int_C \vec{A}.d\vec{r}$ dengan C adalah lintasan yang diberikan oleh $C_1 : x + y^c = 1$; dan $C_2 : x^2 + y^2 = 1$, seperti ditunjukkan gambar berikut ini.



Penyelesaian:

$$\int_C \vec{A}.d\vec{r} = \int_C \frac{-y\,dx}{x^2+y^2} + \int_C \frac{x\,dx}{x^2+y^2} = \int_C \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$$

- Lintasan C_1:

  $y = 1 - x;\ dy = -dx$

  $$\int_C \vec{A}\ .\ d\vec{r} = \int_{x=1}^{0} \frac{x(-dx)-(1-x)dx}{x^2+(1-x)^2} = -\int_{x=1}^{0} \frac{dx}{2\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right)} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}$$

  $$= -\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}\right)\Bigg]_1^0$$

  $$= -\operatorname{arc\,tg}(-1) + \operatorname{arc\,tg}(1)$$

  $$= \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4}$$

  $$= \frac{\pi}{2}.$$

- Lintasan C_2:

  $x^2 + y^2 = 1$ merupakan persamaan lingkaran dengan parameter:

  $$\begin{matrix} x = \cos\theta\ ;\ dx = -\sin\theta\,d\theta \\ y = \sin\theta\ ;\ dy = \cos\theta\,d\theta \end{matrix} \quad 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{C_2} \vec{A}\,.\,d\vec{r} = \int_{\theta=0}^{\pi/2} \frac{\cos\theta\left(\cos\theta\ d\theta\right) - \sin\theta\left(-\sin\theta\, d\theta\right)}{1}$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} \left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) d\theta$$

$$= \int_{0}^{\pi/2} d\theta$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

Terlihat bahwa $\int_{C_1} \vec{A}.d\vec{r} = \int_{C_2} \vec{A}.d\vec{r}.$

Yang berarti bahwa integral lintasan medan vektor $\vec{A}$ tidak bergantung pada lintasan yang ditempuh, baik melalui C_1 maupun melalui C_2 hasilnya adalah sama.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diberikan medan vektor skalar $\phi = 2xz^4 - x^2y.$ Tentukanlah:
   a. gradien ϕ;
   b. turunan arah ϕ di titik (1, -2, 1) pada arah vektor $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}.$
2) Diberikan medan vektor $\vec{A} = \hat{i}6x^2y^2z^3 + \hat{j}5x^2yz^4 + \hat{k}8xy^2z^2.$ Hitunglah div $\vec{A}$!
3) Tentukanlah konstanta a agar medan vektor $\vec{F} = \hat{i}\left(ax^2 + 2yz\right) + \hat{j}\left(4yx - z\right) + \hat{k}\left(xy^2 - xz\right)$ bersifat solenoidal!
4) Carilah Curl $\vec{A}$ di titik (1, -1, 1) bila $\vec{A} = \hat{i}\,xz^3 - \hat{j}\,2x^2yz + \hat{k}\,2yz^4.$
5) Buktikan bahwa $\vec{A} \times \vec{B}$ bersifat solenoidal bila $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ keduanya bersifat irrotasional!

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a. gradien ϕ

$$\vec{\nabla}\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

$$= \hat{i}\left(2z^4 - 2xy\right) - \hat{j}\left(x^2\right) + \hat{k}\left(8xz^3\right).$$

b. turunan arah ϕ di titik (1, -2, 1) pada arah $2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$.

$$|\vec{v}| = \sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (2)^2} = 3;\ \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \hat{i}\left(\frac{2}{3}\right) - \hat{j}\left(\frac{1}{3}\right) + \hat{k}\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\frac{d\phi}{ds} = \vec{\nabla}\phi.\hat{v} = \left\{\hat{i}\left(2z^4 - 2xy\right) - \hat{j}\left(x^2\right) + \hat{k}\left(8xz^3\right)\right\}.\left\{\hat{i}\left(\frac{2}{3}\right) - \hat{j}\left(\frac{1}{3}\right) + \hat{k}\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\left(z^4 - xy\right) + \frac{1}{3}\left(x^2\right) + \frac{16}{3}\left(xz^3\right).$$

$\frac{d\phi}{ds}$ di titik (1, -2, 1) adalah

$$\frac{d\phi}{ds} = \frac{4}{3}\left((1)^4 - (1)(-2)\right) + \frac{1}{3}\left(1^2\right) + \frac{16}{3}\left((1).(1)^3\right)$$

$$= \frac{29}{3}.$$

2) $\vec{A} = \hat{i}6x^2y^2z^3 + \hat{j}5x^2yz^4 + \hat{k}8xy^2z^2$

$$\vec{\nabla}.\vec{A} = \frac{\partial}{\partial x}\left(6x^2y^2z^3\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(5x^2yz^4\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(8xy^2z^2\right)$$

$$= 12xy^2z^3 + 5x^2z^4 + 16xy^2z.$$

3) Medan vektor $\vec{F}$ bersifat solenoidal jika $\vec{\nabla}.\vec{F} = 0.$

$$\vec{\nabla}.\vec{F} = \frac{\partial}{\partial x}\left(ax^2 + 2yz\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(4yx - z\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(xy^2 - zx\right)$$

$$= 2ax + 4x - x$$

$$= \left(2a + 3\right)x$$

agar $\left(2a + 3\right)x = 0$ jika dan hanya jika 2a + 3 = 0 atau a = $-1,5$.

Jadi agar vektor $\vec{F}$ bersifat solenoidal maka a harus sama dengan $-1,5$.

4) $\vec{\nabla}\times\vec{A} = \hat{i}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(2yz^4\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(-2x^2yz\right)\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(xz^3\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(2yz^4\right)\right)$

$$+\hat{k}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2yz\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xz^3\right)\right)$$

$$= \hat{i}\left(2z^4 + 2x^2y\right) + \hat{j}3xz^2 - \hat{k}4xyz$$

di titik (1, -1, 1) Curl $\vec{A}$ adalah $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 3\hat{j} + 4\hat{k}$.

5) Solenoidal jika $\vec{\nabla}.\vec{A} = 0$ dan irrotasional bila $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$.

$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = 0$. Bila $\vec{\nabla}\times\vec{A} = 0$ dan $\vec{\nabla}\times\vec{B} = 0$.

Bukti:

$$\vec{\nabla}.\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \vec{B}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \vec{A}.\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)$$

$$= \vec{B}.0 - \vec{A}.0$$

$$= 0.$$

RANGKUMAN

1. Medan skalar dan medan vektor masing-masing dapat didefinisikan sebagai berikut. Jika pada setiap titik P(x, y, z) dari suatu daerah D dalam ruang dikaitkan dengan:
   a. Sebuah skalar ϕ maka fungsi skalar ϕ(x, y, z) akan mendefinisikan sebuah medan skalar dalam daerah D.
   b. Sebuah vektor $\vec{F}$ maka fungsi vektor $\vec{F}(x,y,z)$ mendefinisikan sebuah medan vektor dalam daerah D dalam komponen:
   $$\vec{F}(x,y,z) = F_x(x,y,z)\hat{i} + F_y(x,y,z)\hat{j} + F_z(x,y,z)\hat{k}.$$
2. Contoh medan skalar adalah suhu T di dalam benda logam, tekanan di dalam daerah yang diakhiri oleh fluida yang termampatkan, sedangkan contoh medan vektor adalah kecepatan aliran fluida $\vec{v}$ pada setiap titik dalam fluida dan medan elektrostatik $\vec{E}(x,y,z)$.
3. Jika ϕ adalah suatu fungsi skalar dan diferensiabel pada setiap titik dalam suatu ruang tertentu maka gradien medan skalar didefinisikan sebagai:

$$\nabla\phi = \hat{i}\frac{\partial\phi}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial\phi}{\partial z}$$

Sedangkan turunan arah medan skalar dalam arah $\vec{v}$ didefinisikan sebagai:

$$\frac{d\phi}{ds} = \nabla\phi.\hat{v},\ \text{dengan}\ \hat{v} = \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}.$$

4. Bila $\vec{A}$ terdefinisikan dan terdiferensiabel dalam suatu daerah tertentu dari ruang maka divergensi dari $\vec{A}$ adalah:

$$\nabla.\vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Bila $\nabla.\vec{A} = 0$ maka medan vektor $\vec{A}$ bersifat **medan solenoidal**.

5. Curl dari medan vektor $\vec{A}$ dapat dirumuskan sebagai:

$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$$

Bila $\nabla\times\vec{A} = 0$ maka medan vektor $\vec{A}$ bersifat **medan rotasional**, sedangkan bila $\nabla\times\vec{A} \neq 0$ maka medan vektor $\vec{A}$ dinamakan **medan vorteks**.

6. Integral vektor antara limit t = a dan b dapat dirumuskan:

$$\int_a^b \vec{A}(t)dt = \vec{B}(b) - \vec{B}(a);\ \vec{A}(t) = \frac{d\vec{B}(t)}{dt}.$$

7. Integral lintasan dapat dirumuskan sebagai:

$$\int_C \vec{A}.d\vec{r} = \int_C \left(A_x dx + A_y dy + A_z dz\right).$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Tentukanlah gradien medan skalar $\phi(r)$ bila $\phi(r) = \frac{1}{r}$.

A. $\nabla\phi(r) = \frac{-\vec{r}}{r}$

B. $\nabla\phi(r) = \frac{-\vec{r}}{r^2}$

C. $\nabla\phi(r)=\dfrac{-\hat{r}}{r}$

D. $\nabla\phi(r)=\dfrac{-\hat{r}}{r^2}$

2) Hitunglah turunan arah dari $\phi(x,y,z)=xy^2+yz^3$ di titik $(2,-1,1)$ pada arah vektor $\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}$.

A. $\dfrac{13}{5}$

B. $\dfrac{11}{3}$

C. $\dfrac{-13}{5}$

D. $\dfrac{-11}{3}$

3) Jika $\vec{A}=x^2z\,\hat{i}-2y^3z^2\,\hat{j}+xy^2z\,\hat{k}$ maka div $\vec{A}$ pada titik $(1,\ -1,\ 1)$ adalah ….

A. -1
B. -2
C. -3
D. -5

4) Hitunglah div grad $\phi(\nabla.\nabla\phi)$ apabila $\phi(x,y,z)=2x^3y^2z^4$.

A. $12xy^2z^4+4x^3z^4+48x^3yz$

B. $12xy^2z^4+4x^3z^4+24x^3y^2z^2$

C. $4x^2y^2z^4+12x^3z^4+24x^3y^2z^4$

D. $4x^2y^2z^4+24x^2z^3+12x^2y^3z^2$

5) Tentukanlah konstanta C sehingga vektor gaya $\vec{F}(x,y,z)=\hat{i}(x+3y)+\hat{j}(y-2z)+\hat{k}(x+cz)$ bersifat solenoidal.

A. -2
B. -3
C. 2
D. 3

6) Carilah Curl $\vec{A}$ jika $\vec{A} = x^2y\,\hat{i} - 2xz\,\hat{j} + 2yz\,\hat{k}$.
   A. $(2x+2y)\hat{i} - \left(y^2+2z\right)\hat{j}$
   B. $(2x+2z)\hat{i} + \left(z^2+2y\right)\hat{j}$
   C. $(2x+2y)\hat{i} - \left(x^2+2z\right)\hat{k}$
   D. $(2y+2z)\hat{i} + \left(x^2+2y\right)\hat{k}$

7) Vektor berikut ini yang bersifat solenoidal adalah ….
   A. $\left(2x^2y+3yz\right)\hat{i} + (2y-4z)\,\hat{j} + \left(x^2+2z\right)\hat{k}$
   B. $\left(y+3y^2zx\right)\hat{i} + \left(4xz-y^3z\right)\hat{j} + \left(2xy+x^2y^2\right)\hat{k}$
   C. $x^2z\,\hat{i} - 2y^3z^2\hat{j} + xy^2z\,\hat{k}$
   D. $2xz\,\hat{i} + 6y^2z^3\,\hat{j} - 2xy^2z^2\,\hat{k}$

8) Bila dilihat dari bentuknya maka vektor berikut ini.
   $\vec{A} = (x+2y+4z)\,\hat{i} + (2x-3y-z)\,\hat{j} + (4x-y+2z)\,\hat{k}$ adalah bersifat ….
   A. rotasional
   B. solenoidal
   C. irrotasional
   D. vorteks

9) Hitunglah $\int_c \vec{A}.d\vec{r}$ bila diketahui $\vec{A} = \left(3x^2+6y\right)\hat{i} - 14yz\,\hat{j} + 20xz^2\,\hat{k}$ dari titik asal ke (1, 1, 1) dengan lintasan yang diberikan oleh C: $x = t,\ y = t^2$, dan $z = t^3$.
   A. 1
   B. 3
   C. 5
   D. 7

10) Tentukanlah usaha total yang dilakukan untuk menggerakkan sebuah benda dalam medan gaya yang diberikan oleh persamaan:
$\vec{F} = 3xy\,\hat{i} - 5z\,\hat{j} + 10x\,\hat{k}$.
Sepanjang kurva $x = t^2,\ y = 2t^2,\ z = t^3$ dari $t = 1$ sampai $t = 2$.
A. 178
B. 303
C. 521
D. 748

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2 terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) D $\vec{C} = 2\vec{A} + \vec{B} = \left(6\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}\right) + \left(\hat{i} - 3\hat{j} - 5\hat{k}\right) = 7\hat{i} - \hat{j} - \hat{k},$ besarnya vektor $\vec{C}$ adalah $\left|\vec{C}\right| = \sqrt{49+1+1} = \sqrt{51.}$

2) B Agar persamaan $\vec{d} = p\vec{a} - q\vec{b} + r\vec{c}.$

$$\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k} = p\left(2\hat{i} + \hat{j} - \hat{k}\right) - q\left(\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}\right) + r\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right)$$

$$= (2p - q + r)\hat{i} + (p + 2q + r)\hat{j} + (-p - 3q + r)\hat{k}$$

diperoleh

$$2p - q + r = 1$$
$$p + 2q + r = 2$$
$$-p - 3q + r = 3$$

melalui cara eliminasi diperoleh $p = \frac{-6}{11}$; $q = \frac{-2}{11}$; dan $r = \frac{21}{11}$.

3) C $\vec{P} = 2\hat{i} - \hat{j} - \hat{k},\ \vec{Q} = 2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k},$ dan $\vec{R} = \hat{j} + \hat{k}.$

$$2\vec{P} + \vec{Q} - 3\vec{R} = \left(4\hat{i} - 2\hat{j} - 2\hat{k}\right) + \left(2\hat{i} - 3\hat{j} + \hat{k}\right) - \left(3\hat{j} + 3\hat{k}\right)$$

$$= 6\hat{i} - 8\hat{j} - 4\hat{k}.$$

4) B $\vec{A} = \hat{i} + 2\hat{j} - 2\hat{k}$ dan $\vec{B} = 5\hat{i} - 2\hat{j} - \hat{k}.$ Hasil kali titik antara $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ adalah $\vec{A}.\vec{B} = 1.5 + 2.(-2) + (-2).(-1) = 3.$

5) C $\vec{a} = 2\hat{i} - \hat{j} + \hat{k}$ dan $\vec{b} = \hat{i} + \hat{j} + 2\hat{k}.$ Sudut apit antara $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ adalah

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{2-1+2}{\sqrt{6}\sqrt{6}} = \frac{1}{2}.\ \text{Jadi,}\ \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^{o}.$$

6) B $\vec{A} = 2\hat{i} + \hat{j} - 3\hat{k}$ dan $\vec{B} = \hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}.$ Misalkan vektor $\vec{C} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$ adalah vektor yang tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ sehingga diperoleh:

$\vec{A}.\vec{C} = 0$ atau $2a + b = 3c$

$\vec{B}.\vec{C} = 0$ atau $a - 2b = -c$

Dari kedua persamaan tersebut diperoleh a = b = c.

$$\left|\vec{C}\right| = 3 = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} = a\sqrt{3} \text{ atau } a = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}.$$

Jadi, vektor yang tegak lurus pada $\vec{A}$ dan $\vec{B}$ dengan besar 3 satuan adalah:

$\vec{C} = \sqrt{3}\left(\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right).$

7) C $\vec{u} = a\hat{i} - 2\hat{j} + 3\hat{k}$ dan $\vec{v} = 4\hat{i} + \hat{j} - 2\hat{k}.$

Agar $\vec{u}$ dan $\vec{v}$ saling tegak lurus maka harus memenuhi $\vec{u}.\vec{v} = 0.$

$\vec{u}.\vec{v} = 0 = 4a - 2 - 6.$

Jadi, 4a = 8 atau a = 2.

8) D $\vec{a} = \hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\ \vec{b} = \hat{i} - \hat{j} + \hat{k},$ dan $\vec{c} = \hat{i} + \hat{j} - \hat{k}.$

$$\vec{a}.\vec{b}\times\vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 4.$$

9) A $\vec{p}(t) = 3t^2\hat{i} - (t+4)\hat{j} + \left(t^2 - 2t\right)\hat{k},\ \vec{q}(t) = \sin t\,\hat{i} + 3e^{-t}\,\hat{j} - 3\cos t\,\hat{k}$

$$\vec{p}\times\vec{q} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3t^2 & -(t+4) & \left(t^2 - 2t\right) \\ \sin t & 3e^{-t} & -3\cos t \end{vmatrix}$$

Hasil $\vec{p}\times\vec{q}$ ini didiferensiasi terhadap waktu sebanyak dua kali untuk t = 0.

$$\frac{d^2}{dt^2}(\vec{p}\times\vec{q}) = \frac{d}{dt}\left[\frac{d}{dt}(\vec{p}\times\vec{q})\right] = -6\hat{i} + 18\hat{j} + 20\hat{k}.$$

10) D $\phi(x,y,z) = xy^2z$ dan $\vec{A} = xz\,\hat{i} - xy^2\,\hat{j} + yz^2\,\hat{k}.$

Gunakan rumus $\dfrac{\partial^3}{\partial x^2 \partial z}\left(\phi\vec{A}\right) = \dfrac{\partial\vec{P}}{\partial x}$ di mana $\vec{P} = \dfrac{\partial\vec{Q}}{\partial x}$ dan $\vec{Q} = \dfrac{\partial\vec{R}}{\partial z}$

dengan $\vec{R} = \phi\vec{A} = x^2y^2z^2\,\hat{i} - x^2y^4z\,\hat{j} + xy^3z^3\,\hat{k}.$

Tes Formatif 2

1) D Diferensiasi $\phi(r)$ terhadap r adalah $\frac{d\phi(r)}{dr}=\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{-1}{r^2}$. Gradien skalar ϕ dapat dirumuskan: $\nabla\phi(r)=\hat{r}\frac{d\phi(r)}{dr}=\hat{r}\left(\frac{-1}{r^2}\right)$.

2) D Turunan arah dari ϕ pada arah $\hat{v}$ adalah:

$$\nabla\phi.\hat{v}=\left(\hat{i}-3\hat{j}-3\hat{k}\right).\frac{1}{3}\left(\hat{i}+2\hat{j}+2\hat{k}\right)$$

$$=\frac{-11}{3}.$$

3) C Gunakan rumus $\nabla.\vec{A}=\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}$. Kemudian masukkan harga x = 1, y = -1, dan z =1.

4) B Tentukan terlebih dahulu grad ϕ, misalnya $\nabla\phi=\vec{B}$ maka

$$\nabla.\nabla\phi=\nabla.\vec{B}$$

$$=\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

5) A Medan solenoidal bila $\nabla.\vec{F}=0.$

$$\nabla.\vec{F}=1+1+c=0,\ c=-2.$$

6) C Gunakan rumus

$$\nabla\times\vec{A}=\hat{i}\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)+\hat{j}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)+\hat{k}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right).$$

7) B Bersifat solenoidal apabila $\nabla.\vec{A}=0.$

8) C Bersifat irrotasional apabila $\nabla\times\vec{A}=0.$

9) C $\int_C \vec{A}.d\vec{r}=\int_{t=0}^{1}\left[\left(3t^2+6t^2\right)dt-14\left(t^2\right)\left(t^3\right)d\left(t^2\right)+20\left(t\right)\left(t^3\right)^2d\left(t^3\right)\right]$

$$= \int_{t=0}^{1} \left(9t^2 - 28t^6 + 60t^9\right) dt$$

$$= 3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}\Big|_0^1$$

$$= 5.$$

10) B Usaha total = $\int_C \vec{F}.d\vec{r}$; $x = t^2 + 1$, $y = 2t^2$, $z = t^3$

$$= \int_C \left(3xy\,dx - 5z\,dy + 10x\,dz\right)$$

$$= \int_{t=1}^{2} \left(12t^5 + 10t^4 + 12t^3 + 30t^2\right) dt$$

$$= 303.$$

Glosarium

Besaran skalar	:	adalah besaran yang mempunyai besar (nilai), tetapi tidak memiliki arah, misalnya massa, panjang, waktu, dan suhu.
Besaran vektor	:	adalah besaran yang mempunyai besar dan arah, seperti posisi, kecepatan, gaya, dan momentum.
Diferensiabel	:	adalah fungsi dari dua atau lebih variabel yang memiliki turunan parsial pertama yang kontinu.

Daftar Pustaka

Arfken, George. (1985). *Mathematical Methods for Physicists. 3th Edition*. New York: Academic Press.

Boas, Mary L. (1983). *Mathematical Methods in the Physical Sciences. 2nd Edition*. New York: Academic Press.

Spiegel, M. R. (1988). *Analisis Vektor. Cetakan Ketiga. Terjemahan.* Jakarta: Erlangga.