MODUL 1

Himpunan dan Sistem Bilangan Real

Drs. Warsito, M.Pd.

PENDAHULUAN

Pokok bahasan Himpunan dan Sistem Bilangan Real sebenarnya masih termasuk kedalam kelompok prakalkulus. Materi himpunan dan sistem bilangan telah dibahas secara rinci dan mendalam di Pengantar Matematika (MATA4101).

Namun, karena tidak semua dari Anda diwajibkan mengambil Pengantar Matematika maka Anda perlu bekal materi Himpunan dan Sistem Bilangan Real sebagai acuan pembahasan materi Kalkulus I. Bagi Anda yang telah mengambil Pengantar Matematika, anggaplah materi materi hmpunan ini sebagai penyegaran.

Untuk mempermudah pemahaman, materi Modul 1 ini dibagi dalam 2 kegiatan belajar. Kegiatan Belajar 1 membahas konsep himpunan, operasi himpunan, dan hierarki himpunan bilangan. Sedangkan Kegiatan Belajar 2 membahas sistem bilangan real, urutan bilangan real, pertidaksamaan, nilai mutlak dan pertidaksamaan nilai mutlak.

Setelah mempelajari modul ini Anda diharapkan memiliki kemampuan untuk menjelaskan himpunan dan sistem bilangan real. Secara lebih rinci lagi diharapkan mampu:

1. menjelaskan konsep himpunan;
2. menjelaskan operasi-operasi pada himpunan;
3. menjelaskan himpunan bilangan real;
4. menjelaskan sistem bilangan real;
5. menjelaskan urutan bilangan real;
6. menjelaskan pertidaksamaan;
7. membedakan antara pertidaksamaan dan persamaan;
8. menentukan penyelesaian pertidaksamaan;
9. menjelaskan nilai mutlak; dan
10. menentukan penyelesaian pertidaksamaan nilai mutlak.

KEGIATAN BELAJAR 1

Himpunan dan Operasinya

A. PENGERTIAN HIMPUNAN

Anda tentu sering melihat pedagang menjajakan dagangannya dengan harga ditulis di secarik kertas yang berbeda-beda. Dari kejauhan telah terlihat, misalnya dagangan buah duku, ada yang berharga Rp.10.000/kg, ada yang Rp.8.000/kg, dan ada yang Rp.6000/kg. Para pedagang tersebut melakukan pengelompokan berdasarkan besar-kecilnya (kualitas) duku, yaitu duku yang besar (kualitas bagus), duku sedang (kualitas sedang), dan duku kecil (kualitas kurang bagus).

Secara tidak disadari, sebenarnya pedagang tersebut telah menggunakan konsep himpunan. Mereka membuat himpunan duku besar, himpunan duku sedang, dan himpunan duku kecil.

Secara lebih formal, himpunan tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut.

> Himpunan adalah sekumpulan atau sekelompok objek yang memiliki **ciri sama** yang dinyatakan dengan **jelas**.

Di sini ada penekanan berupa ciri sama dan jelas. Pada ilustrasi pedagang duku, ciri sama dan jelas adalah duku besar (kalitas bagus), duku sedang (kualitas sedang), dan duku kecil (kualitas kurang bagus).

Ilustrasi yang lain dapat dilihat pada contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.1.1

(a) Himpunan semua mahasiswa UT. Di sini yang menjadi ciri sama adalah **mahasiswa UT**. Jadi mahasiswa yang berada di Medan, Makasar, Jakarta atau di Jayapura bahkan yang berdomisili di luar negeri asalkan mereka terdaftar di UT maka mereka termasuk objek himpunan tersebut.

(b) Himpunan mahasiswa UT yang registrasi mata kuliah Kalkulus I. Di sini yang menjadi anggota himpunan hanya mahasiswa yang memiliki ciri sama yaitu **mahasiswa UT yang registrasi mata kuliah Kalkulus I** saja. Mahasiswa yang walaupun ia terdaftar di UT tetapi tidak registrasi mata kuliah Kalkulus I, maka ia tidak termasuk dalam himpunan ini.

(c) Himpunan semua bilangan asli yang lebih kecil dari 10. Di sini yang menjadi objek himpunan adalah bilangan $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sedangkan $\frac{1}{2}, -1, \pi, \ldots$ tidak termasuk objek himpunan tersebut.

(d) Himpunan huruf hidup (vokal). Jadi anggota himpunan itu hanya terdiri dari huruf $a, i, u, e,$ dan o. Sedangkan huruf mati (konsonan) $b, c, d, f, \ldots$ dan yang lainnya tidak termasuk dalam himpunan tersebut.

B. LAMBANG DAN CARA PENULISAN HIMPUNAN

Lambang himpunan secara umum ditulis dengan huruf kapital $A, B, C, D, \ldots$ dan seterusnya. Untuk himpunan khusus yaitu himpunan bilangan asli, himpunan bilangan bulat, himpunan bilangan rasional, himpunan bilangan irasional, himpunan bilangan real dan himpunan bilangan kompleks akan di berikan notasi tersendiri yaitu $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}_r$, $\mathbb{R}$, dan $\mathbb{C}$.

Sedangkan objeknya ditulis dengan huruf kecil $a, b, c, d, e, \ldots$ dan seterusnya, atau dengan bilangan, 1,2,3,4,5,6, dan seterusnya, atau dengan menyebutkan nama objeknya langsung.

Penulisan himpunan ada dua cara:

(1) menjelaskan berdasarkan ciri-cirinya, misalnya
$A = \ x \mid \text{penjelasan dari ciri-ciri objek } x$

(2) mendaftarkan obyeknya didalam kurung kurawal $A = \ \ldots \ $.

Contoh 1.1.2

Apabila contoh 1.1.1 dituliskan dengan cara (1):

(a) $M = \ m \mid m \text{ mahasiswa UT}$

(b) $K = \ x \mid x \text{ mahasiswa UT yang registrasi Kalkulus I}$

(c) $N = \ x \mid x \text{ bilangan asli lebih kecil dari } 10$

(c) $V = \ x \mid x \text{ huruf hidup (vokal)}$

Apabila contoh 1.1.1 dituliskan dengan cara (2):

(a) $M=\{M_1, M_2, M_3, \ldots \text{dan seterusnya}\}$. Ini tidak praktis karena harus menyebutkan satu per satu dari ratusan ribu nama mahasiswa (jumlah mahasiswa UT tahun 2008, lebih dari 500.000)

(b) tidak praktis karena harus menyebutkan satu per satu dari sekitar 90 nama mahasiswa (jumlah mahasiswa yang registrasi Kalulus I kurang lebih 90 orang setiap masa registrasi)

(c) $N = \quad 1,2,3,4,5,6,7,8,9$

(d) $V = \quad a,i,u,e,o$

Cara penulisan himpunan dengan menggunakan cara (1) atau cara (2) sangat tergantung pada keperluan atau konteksnya.

C. ANGGOTA DAN BUKAN ANGGOTA

Suatu objek yang **termasuk** didalam himpunan disebut **anggota** atau **unsur** atau **elemen** diberi notasi $\in$, sedangkan yang **tidak termasuk** didalam himpunan disebut **bukan anggota** atau bukan unsur atau bukan elemen diberi notasi $\notin$. Himpunan yang tidak memiliki anggota disebut **himpunan kosong**, diberi notasi $\varnothing$. Himpunan semesta, ditulis S adalah himpunan yang memuat semua anggota yang sedang dibicarakan.

Contoh 1.1.3

(a) Jika $V = \quad a,i,u,e,o \quad$, maka $a \in V$ dan juga $i,u,e,o \in V$, sedangkan $b \notin V$ dan juga $c,d,f,g,h,j \notin V$.

(b) Jika $N = \quad 1,2,3,\ldots \quad$, maka $2 \in N$ dan juga $4,\ 7,\ 10,\ 100 \in N$ sedangkan $-1 \notin N$ dan juga $\frac{1}{2}, \pi, -5, \notin N$.

(c) $\varnothing = \quad x \mid x$ bilangan *genap* dengan $2x = 5$

(d) $S = \quad x \mid x$ abjad latin $= \quad a,b,c,\ldots,z$

D. HIMPUNAN BERHINGGA DAN TAK BERHINGGA

Suatu himpunan disebut **berhingga**, apabila banyaknya anggota berhingga.

Contoh 1.1.4

(a) $A = \{2,4,6,9\}$ himpunan berhingga, banyaknya anggota ada 4 buah.

(b) $B = \{x \mid x \text{ yang memenuhi persamaan } 2x = 4\}$

Catatan : $2x = 4 \Rightarrow x = 2$, dengan cara (2) dapat ditulis $B = \{2\}$, sehingga merupakan himpunan yang memiliki 1 anggota saja.

Suatu himpunan disebut **tak berhingga**, apabila banyaknya anggota tidak berhingga.

Contoh 1.1.5

(a) $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$, di belakang 3 masih dapat diteruskan $4,5,6,\ldots$ dan seterusnya tidak berakhir.

(b) $H = \left\{x \,\middle|\, x = \frac{1}{n} \text{ dan } n \in \mathbb{N}\right\} = \left\{\frac{1}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\} = \left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\ldots\right\}$. Di belakang $\frac{1}{3}$ masih ada anggota lain $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6},\ldots$ dan seterusnya.

E. HIMPUNAN BAGIAN DAN KOMPLEMEN

Dua himpunan A dan B dikatakan **sama**, ditulis $A = B$ jika kedua himpunan memiliki anggota-anggota yang sama.

Himpunan A dikatakan **himpunan bagian** dari himpunan B, ditulis $A \subseteq B$ jika setiap anggota A juga anggota B.

Himpunan A dikatakan **himpunan bagian sejati** dari himpunan B, ditulis $A \subset B$, jika $A \subseteq B$ tetapi $A \neq B$.

Himpunan komplemen A adalah himpunan bagian S yang anggotanya **bukan** anggota A dan diberikan notasi $\overline{A} = \{x \mid x \in S \text{ tetapi } x \notin A\}$.

Contoh 1.1.6

Misalkan $A = \ 2,3,4 \ $, $B = \ 1,2,3,4,5 \ $, dan $C = \ 5,4,3,2,1 \ $ maka:

(a) $B = C$, $C = B$

(b) $A \subseteq B$, $A \subseteq C$

(c) $B \subseteq C$, $C \subseteq B$

(d) $A \subset B$, $A \subset C$

Contoh 1.1.7

Misalkan $S = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

(a) Jika $A = \{1,3,5,7,9\}$ maka $\overline{A} = \{0,2,4,6,8\}$

(b) Jika $B = \{1,3,5\}$ maka $\overline{B} = \{0,2,4,6,7,8,9\}$

(c) Jika $C = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8\}$ maka $\overline{C} = \{9\}$

F. OPERASI HIMPUNAN DAN DIAGRAM VENN

Misalkan $A \subseteq S$ dan $B \subseteq S$, maka:

(a) **Gabungan** himpunan A dan B , diberi notasi $A \cup B$ adalah himpunan yang anggotanya milik A **atau** B **atau** keduanya. Jadi ditulis, $A \cup B = \ x \mid x \in A$ **atau** $x \in B \ $.

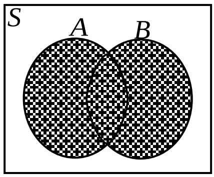


Diagram $A \cup B$

(b) **Irisan** himpunan A dan B , diberi notasi $A \cap B$ adalah himpunan yang anggotanya sekaligus milik A dan milik B . Jadi ditulis, $A \cap B = \ x \mid x \in A$ **dan** $x \in B \ $.

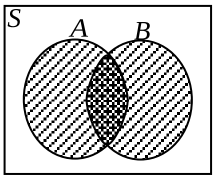


Diagram $A \cap B$

(c) **Selisih** himpunan A dan B , ditulis:

(1). $A - B$ adalah himpunan yang anggotanya milik A tetapi bukan milik B . Jadi , $A - B = \ x \mid x \in A$ **dan** $x \notin B \ $.

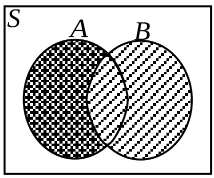


Diagram $A - B$

(2) $B - A$ adalah himpunan yang anggotanya milik B tetapi bukan milik A. Jadi, $B - A = \ x \middle| x \in B$ **dan** $x \notin A$

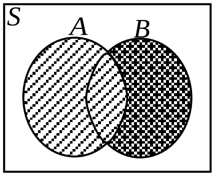
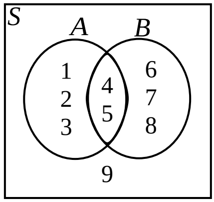


Diagram $B - A$

Contoh 1.1.8

Misalkan $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$,
$A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ dan $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$,
maka:

(a) $A \bigcup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
(b) $A \cap B = \{4, 5\}$ = { 4, 5 }
(c) $A - B = \{1, 2, 3\}$
(d) $B - A = \{6, 7, 8\}$ = { 6, 7, 8 }
(e) $\bar{A} = \{6, 7, 8, 9)$
(f) $\overline{(A \cup B)} = \{9\}$



G. HIERARKI HIMPUNAN BILANGAN

Berikut ini akan diberikan hierarki bilangan, yaitu dari bilangan-bilangan asli sampai dengan bilangan kompleks. Walaupun pada pembahasan kalkulus berdasarkan bilangan real, namun bilangan kompleks diberikan sekedar untuk pengenalan. Bilangan kompleks secara mendalam akan dibahas pada BMP (buku materi pokok) Fungsi Kompleks/MATA4322.

Himpunan bilangan **asli** (bulat positif), diberi notasi $\mathbb{N}$, adalah himpunan bilangan yang beranggotakan bilangan-bilangan bulat positif

$$\mathbb{N} = \ 1, 2, 3, 4, 5, \ldots \ .$$

Himpunan bilangan **prima,** ditulis P, adalah himpunan bilangan asli yang lebih besar dari 1dan hanya mempunyai faktor bilangan 1 dan bilangan itu sendiri.

$$P = \ 2, 3, 5, 7, 11, \ldots$$

Himpunan bilangan **komposit** (tersusun), ditulis K, adalah himpunan bilangan asli lebih besar dari 1 yang bukan bilangan prima.

$$K = \{x \mid x \in \mathbb{N} \text{ dan } x > 1 \text{ dan } x \notin P\} \quad \text{atau } K = \{4, 6, 8, 9, 10, \ldots\}$$

Himpunan bilangan **cacah** adalah himpunan bilangan asli (bulat positif) digabung unsur 0 (nol). Apabila ditulis dalam bentuk himpunan

$$C = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}.$$

Himpunan bilangan **bulat**, diberi notasi $\mathbb{Z}$ adalah himpunan bilangan bulat negatif digabung (ditambah) unsur 0 digabung himpunan bilangan asli. Apabila ditulis dalam bentuk himpunan

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1\} \cup \mathbb{N} \cup \{0\} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Himpunan bilangan **pecahan** diberikan notasi,

$$P_e = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \notin \mathbb{Z} \text{ dengan } a, b \in \mathbb{Z} \right\} = \{\ldots, -\tfrac{1}{3}, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{2}, \ldots\}.$$

Himpunan bilangan **rasional** diberi notasi $\mathbb{Q}$,

$$\mathbb{Q} = \left\{ x \mid x = \frac{a}{b} \text{ dengan } a, b \in \mathbb{Z} \right\}.$$

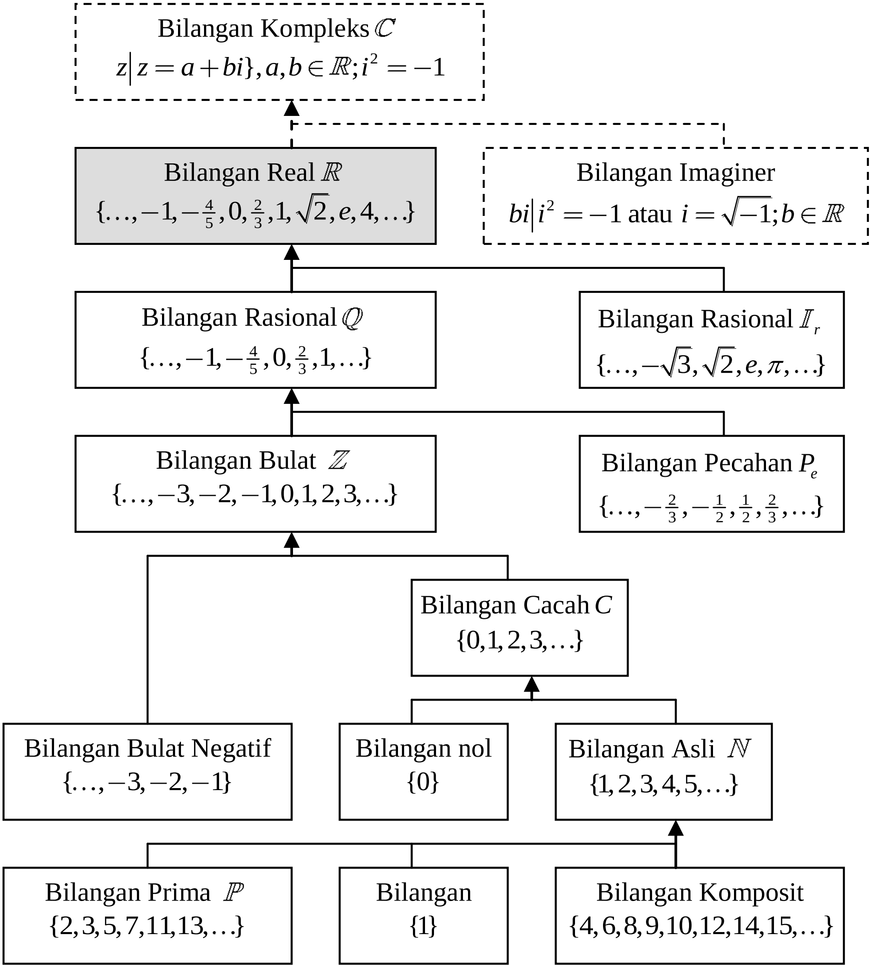
Himpunan bilangan **irasional** diberi notasi $\mathbb{I}_r$,

$$\mathbb{I}_r = \{\ldots, \sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots\}$$

Himpunan bilangan **real** adalah **gabungan** antara himpunan bilangan **rasional** dan himpunan bilangan **irasional**, diberi notasi $\mathbb{R}$ sehingga $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}_r$. [$\mathbb{R}$ kadang-kadang ditulis R]

Apabila diminta mencari penyelesaian $x^2 + 1 = 0$, maka tidak akan ditemukan karena persamaan tersebut $x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1$ menghasilkan bilangan yang **bukan real**. Bilangan bukan real ini dinamakan bilangan imaginer, dengan definisi $i^2 = -1$ atau $i = \sqrt{-1}$. Bilangan kompleks didefinisikan $z = a + bi$; $a, b \in \mathbb{R}$ dengan $i^2 = -1$. Himpunan bilangan kompleks, diberi notasi $\mathbb{C}$, dan $\mathbb{C} = \{z \mid z = a + bi;\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1\}$ dengan i bilangan imaginer (maya).

Apabila dibuat skema hierarki himpunan bilangan-bilangan tersebut akan terlihat seperti pada Bagan 1.2.1. Bilangan kompleks diberikan di Kalkulus I ini hanya sekedar pengenalan, bahasan lebih lengkap disajikan pada BMP. Pada **Kalkulus I** pembahasan hanya didasarkan pada **bilangan real** saja.



Bagan 1.2.1
Hierarki Himpunan Bilangan

H. HIMPUNAN BILANGAN REAL DAN OPERASINYA

Karena kalkulus didasari pada bilangan real, maka kita akan membahas secara khusus contoh-contoh himpunan bilangan real beserta operasinya. Kalau yang dibicarakan bilangan real, berarti dari hierarki himpunan bilangan asli sampai dengan himpunan bilangan real, tidak termasuk himpunan bilangan kompleks.

Contoh 1.1.9

Diketahui $A \subset \mathcal{N}$ dan $B \subset \mathcal{N}$ dengan $A = \; 2,3,4,5,6,7 \;$ dan $B = \; 4,5,6,7,8,9,10 \;$.

Tentukan:

a. $A \cup B$, b. $A \cap B$, c. $A - B$, d. $B - A$, e. $A \cap B \; \cup \; A - B$

Jawab:

$A = \; 2,3,4,5,6,7 \;$ dan $B = \; 4,5,6,7,8,9,10$

a. $A \cup B = \; 2,3,4,5,6,7 \; \cup \; 4,5,6,7,8,9,10 \; = \; 2,3,4,5,6,7,8,9,10 \;$.

b. $A \cap B = \; 2,3,4,5,6,7 \; \cap \; 4,5,6,7,8,9,10 \; = \; 4,5,6,7 \;$.

c. $A - B = \; 2,3,4,5,6,7 \; - \; 4,5,6,7,8,9,10 \; = \; 2,3 \;$.

d. $B - A = \; 4,5,6,7,8,9,10 \; - \; 2,3,4,5,6,7 \; = \; 8,9,10$

e. $A \cap B \; \cup \; A - B \; = \; 4,5,6,7 \; \cup \; 2,3 \; = \; 2,3,4,5,6,7$

Contoh 1.1.10

Diketahui $A \subset \mathcal{Z}$ dan $B \subset \mathcal{Z}$ dengan $A = \; -5,-4-3,-2,-1,0,1,2 \;$ dan $B = \; -2,-1,0,1,2,3,4,5,6 \;$.

Tentukan:

a. $A \cup B$, b. $A \cap B$, c. $A - B$, d. $B - A$, e. $A \cap B \; \cap \; B - A$

Jawab:

a. $A \cup B = \; -5,-4-3,-2,-1,0,1,2 \; \cup \; -2,-1,0,1,2,3,4,5,6$

$= \; -5,-4,-3,-2,-1,-0,1,2,3,4,5,6 \;$.

b. $A \cap B = \; -5,-4-3,-2,-1,0,1,2 \; \cap \; -2,-1,0,1,2,3,4,5,6$

$\quad = \; -2,-1,-0,1,2 \;.$

c. $A - B = \; -5,-4-3,-2,-1,0,1,2 \; - \; -2,-1,0,1,2,3,4,5,6$

$\quad = \; -5,-4,-3 \;.$

d. $B - A = \; -2,-1,0,1,2,3,4,5,6 \; - \; -5,-4-3,-2,-1,0,1,2$

$\quad = \; 3,4,5,6 \;.$

e. $\; A \cap B \; \cap \; B - A \; = \; -2,-1,-0,1,2 \; \cap \; 3,4,5,6 \; = \varnothing .$

Contoh 1.1.11

Diketahui $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, dan $C \subset \mathbb{R}$ dengan $A = \; x \mid -1 \le x < 6 \;$, dan $B = \; x \mid 3 < x \le 9 \;$ dan $C = \; x \mid 10 \le x < 12 \;$.

Tentukan:

a. $A \cup B$, b. $A \cap B$, c. $(A \cup B) \cap C$, d. $(A \cap B) \cup C$, e. $A - B$

Jawab:

$A = \; x \mid -1 \le x < 6 \;$, $B = \; x \mid 3 < x \le 9 \;$, dan $C = \; x \mid 10 \le x < 12$

a. $A \cup B = \; x \mid -1 \le x \le 6 \cup 3 < x \le 9 \; = \; x \mid -1 \le x \le 9$

b. $A \cap B = \; x \mid -1 \le x < 6 \cap 3 < x \le 9 \; = \; x \mid 3 < x < 6$

c. $(A \cup B) \cap C = \; x \mid -1 \le x \le 9 \cap 10 \le x < 12 \; = \varnothing$

d. $(A \cap B) \cup C = \; x \mid 3 < x < 6 \cup 10 \le x < 12$

e. $A - B = \; x \mid -1 \le x < 6 \; - \; x \mid 3 < x \le 9 \; = \; x \mid -1 \le x \le 3$

Contoh 1.1.12

Diketahui $A \subset \mathbb{R}$, $B \subset \mathbb{R}$, dan $C \subset \mathbb{R}$ dengan $A = \; x \mid x^2 - 3x + 2 = 0 \;$, $B = \; x \mid x^2 + x - 6 = 0 \;$, dan $C = \; x \mid x^2 = 4 \;$.

Tentukan:

a. $(A \cap B) \cup C$, b. $(A \cup B) \cap C$, c. $A - B$, d. $B - C$.

Jawab:

$A = \;\; x \mid x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 1; x_2 = 2 \;\;$, sehingga

$A = \{1, 2\}$.

$B = \;\; x \mid x^2 + x - 6 = (x+3)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -3; x_2 = 2 \;\;$, sehingga

$B = \{-3, 2\}$.

$C = \;\; x \mid x^2 = 4 \Rightarrow x^2 - 4 = (x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -2; x_2 = 2 \;\;$, sehingga

$C = \{-2, 2\}$.

Jadi,

a. $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{-3, 2\} = \{2\}$

$(A \cap B) \cup C = \{2\} \cup \{-2, 2\} = \{-2, 2\}$.

b. $A \cup B = \{1, 2\} \cup \{-3, 2\} = \{-3, 1, 2\}$

$(A \cup B) \cap C = \{-3, 1, 2\} \cap \{-2, 2\} = \{2\}$.

c. $A - B = \{1, 2\} - \{-3, 2\} = \{1\}$

d. $B - C = \{-3, 2\} - \{-2, 2\} = \{-3\}$

Setelah menguasai meteri Himpunan dan Operasinya, silahkan Anda mencoba mengerjakan soal-soal latihan berikut ini.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathcal{N}$ dengan

$A = \;\; 2, 3, 4, 5 \;\;$, $B = \;\; 3, 4, 5, 6, 7 \;\;$ dan $C = \;\; 6, 7, 8, 9, 10 \;\;$.

Tentukan:

a. $A \cup B$,

b. $(A \cap B) \cup C$,

c. $(A \cup B) \cap C$,

d. $B - A$,

e. $\overline{B - A}$

2) Diketahui $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$ dan $C \subset \mathbb{Z}$ dengan
$A = \ -3,-2,-1,0 \ $, $B = \ -2,-1,0,1,2 \ $ dan $C = \ -1,0,1,2,3,4 \ $.

Tentukan:
a. $A \cup B$,
b. $(A \cap B) \cup C$,
c. $(A \cup B) \cap C$,
d. $B - A$,
e. $A - B$

3) Diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathbb{R}$ dengan
$A = \ x \big| -3 \le x < -\frac{1}{2} \ $, $B = \ x \big| -1 < x \le 3 \ $ dan $C = \ x \big| \frac{1}{2} < x < 5$

Tentukan:
a. $A \cup B$,
b. $A \cap B$,
c. $(A \cup B) \cap C$,
d. $(A \cap B) \cup C$

4) Diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathbb{R}$ dengan
$A = \ x \mid x^2 - x - 2 = 0 \ $, $B = \ x \mid x^2 - x - 6 = 0 \ $,
dan $C = \ x \mid x^2 - 4 = 0 \ $.

Tentukan:
a. $A \cap B$,
b. $(A \cap B) \cup C$,
c. $(A \cup B) \cap C$,
d. $B - C$,
e. $C - B$

Petunjuk Jawaban Latihan

1) Diketahui $A = \{2,3,4,5\}$, $B = \{3,4,5,6,7\}$ dan $C = \{6,7,8,9,10\}$.
a. $A \cup B = \{2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6,7\} = \ldots.$
b. $(A \cap B) = \{2,3,4,5\} \cup \{3,4,5,6\} = \ldots.$
$(A \cap B) \cup C = \ldots \cup \{6,7,8,9,10\} = \ldots.$
c. $(A \cup B) \cap C = \ldots$
d. $B - A = \{3,4,5,6,7\} - \{\ldots\} = \{6,7\}$.

e. $\mathcal{N} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,\ldots\}$

$\overline{B-A} = \overline{\{6,7\}} = \{1,2,3,4,5,8,\ldots\}$

2) $A = \{-3,-2,-1,0\}$, $B = \{-2,-1,0,1,2\}$ dan $C = \{-1,0,1,2,3,4\}$

a. $A \cup B = \{-3,-2,-1,0\} \cup \{-2,-1,0,1,2\} = \ldots$.

b. $(A \cap B) = \{-3,-2,-1,0\} \cap \{-2,-1,0,1,2\} = \ldots$.

$(A \cap B) \cup C = \ldots \cup \{-1,0,1,2,3,4\} = \ldots$.

c. $(A \cup B) \cap C = \ldots \cap \{-1,0,1,2,3,4\} = \ldots$.

d. $B - A = \{-2,-1,0,1,2\} - \{-3,-2,-1,0\} = \ldots$.

e. $A - B = \{-3,-2,-1,0\} - \{-2,-1,0,1,2\} = \ldots$.

3) $A = \{x \mid -3 \le x < -\frac{1}{2}\}$, $B = \{x \mid -1 < x \le 3\}$ dan $C = \{x \mid \frac{1}{2} < x < 5\}$

a. $A \cup B = \{x \mid -3 \le x < -\frac{1}{2} \cup -1 < x \le 3\} = \ldots$.

b. $A \cap B = \{x \mid -3 \le x < -\frac{1}{2} \cap -1 < x \le 3\} = \ldots$.

c. $(A \cup B) \cap C = \ldots = \{x \mid -3 \le x \le 3 \cap \frac{1}{2} < x < 5\} = \ldots$.

d. $(A \cap B) \cup C = \ldots = \{x \mid -1 < x < -\frac{1}{2} \cup \frac{1}{2} < x < 5\} = \ldots$.

4) $A = \{x \mid x^2 - x - 2 = 0\}$, $B = \{x \mid x^2 - x - 6 = 0\}$,

dan $C = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$.

$A = \{x \mid x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = -1; x_2 = 2\}$, sehingga $A = \{-1,2\}$.

$B = \{x \mid x^2 - x - 6 = \ldots = 0 \Rightarrow x_1 = \ldots; x_2 = \ldots\}$, sehingga $B = \{-2,3\}$.

$C = \{x \mid x^2 - 4 = \ldots = 0 \Rightarrow \ldots\}$, sehingga $C = \{-2,2\}$.

Jadi,

a. $A \cap B = \{-1,2\} \cap \{-2,3\} = \ldots$.

b. $(A \cap B) \cup C = (\{-1,2\} \cap \{-2,3\}) \cup \{-2,2\} = \varnothing \cup \{-2,2\} = \ldots$.

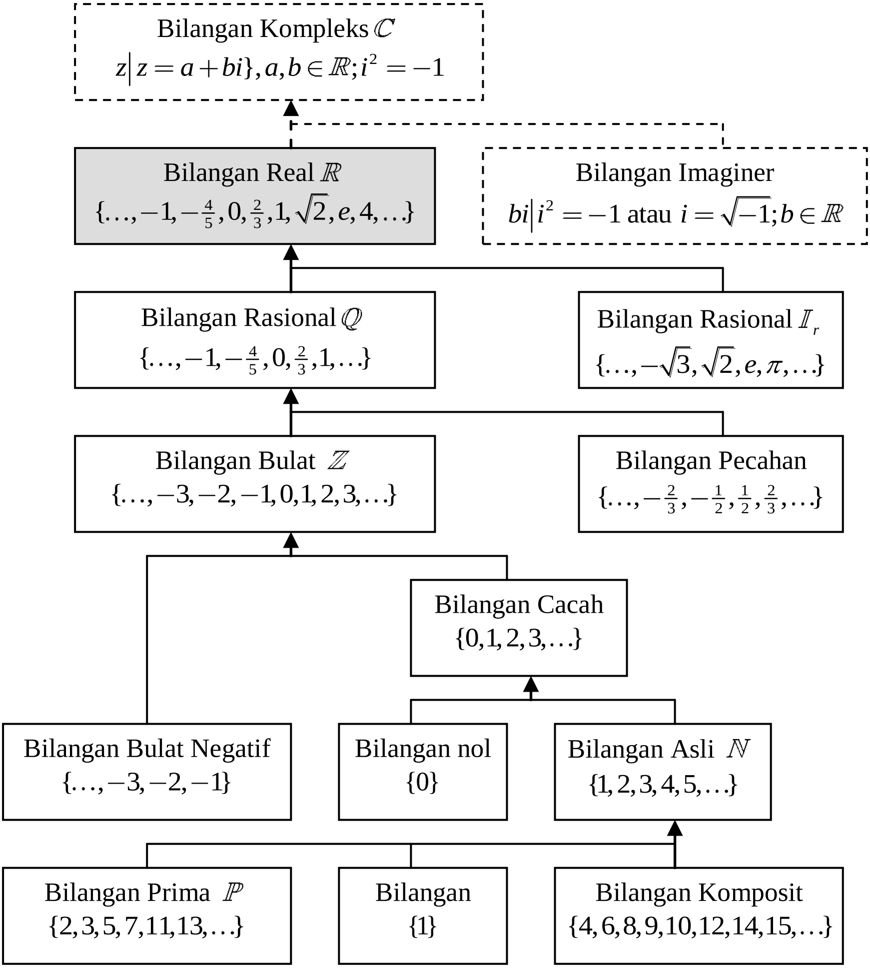
c. $(A \cup B) \cap C = \ldots$.

d. $B - C = \ldots$.

e. $C - B = \{-2,2\} - \{-2,3\} = \ldots$

RANGKUMAN

1. a. Himpunan A **sama** B : $A = B$.
   b. A **himpunan bagian** B : $A \subseteq B$
   c A **himpunan bagian sejati** B : $A \subset B$
2. **Gabungan** himpunan A dan B : $A \cup B =\ x \,|\, x \in A$ **atau** $x \in B$.
3. **Irisan** himpunan A dan B : $A \cap B =\ x \,|\, x \in A$ **dan** $x \in B$.
4. **Selisih** himpunan A dan B :
   a. $A - B =\ x \,|\, x \in A$ **dan** $x \notin B$.
   b. $B - A =\ x \,|\, x \in B$ **dan** $x \notin A$.
5. Komplemen himpunan A :diberikan notasi $\overline{A}$.
6. Kehierarkian himpunan bilangan:



Catatan: Pembahasan Kalkulus I didasarkan pada bilangan real, yang diberikan kotak abu-abu.

TES FORMATIF 1

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

Soal No.1) s/d No.5): Jika diketahui A, B dan C himpunan bagian $\mathbb{N}$ dengan $A = \ 1,2,3,4,5\ $, $B = \ 3,4,5,6,7,8\ $ dan $C = \ 6,7,8,9,10\ $, maka:

1) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$
   A. Benar B. Salah

2) $(A \cap B) \cup C = \ldots$
   A. $(A \cap B) \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ B. $(A \cap B) \cup C = \varnothing$

3) $(A \cup B) \cap C = \ldots$
   A. $\{6,7,8\}$ B. $\{5,6,7,8,9\}$

4) $B - A = \ldots$
   A. $\{5,6,7,8,9\}$ B. $\{6,7,8\}$

5) $\overline{A \cup B} = \ldots$
   A. $\{1,2,3,4,5,9,10\}$ B. $\{1,2,3,4,5,9,10,\ldots\}$

Soal No.6) s/d No.9): Jika diketahui $A \subset \mathbb{Z}$, $B \subset \mathbb{Z}$ dan $C \subset \mathbb{Z}$ dengan $A = \ -3,-2,-1,0,1\ $, $B = \ -2,-1,0,1,2\ $ dan $C = \ -1,0,1,2,3,4,5\ $, maka:

6) $A \cup B = \ldots$
   A. $\{-2,-1,0,1\}$ B. $\{-3,-2,-1,0,1,2\}$

7) $(A \cap B) \cup C = \ldots$
   A. $\{-2,1,0,1,2,3,4,5\}$ B. $\{-3,-2,1,0,1,2,3,4,5\}$

8) $(A \cup B) \cap C = \ldots$
   A. $\{-1,0,1,2\}$ B. $\{-2,1,0,1,2,3,4,5\}$

9) $B - C = \dots$

A. $\{-2,1,0\}$ B. $\{-2\}$

Soal No.10) s/d No.13): Jika diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathbb{R}$ dengan $A = \; x \big| -\frac{5}{2} \leq x < -1$, $B = \; x \big| -2 < x \leq 2$ dan $C = \; x \big| \frac{3}{2} < x < 6$, maka:

10) $A \cup C = \; x \big| -\frac{5}{2} \leq x < -1 \cup \frac{3}{2} < x < 6$

A. Benar B. Salah

11) $A \cap B = \dots$

A. $x \big| -2 \leq x \leq -1$ B. $x \big| -2 < x < -1$

12) $(A \cup B) \cap C = \dots$

A. $x \big| \frac{3}{2} \leq x < 6$ B. $x \big| \frac{3}{2} < x < 6$

13) $(A \cap B) \cap C = \dots$

A. $\varnothing$ B. $x \big| \frac{3}{2} \leq x < 6$

Soal No.14) s/d No.17): Jika diketahui A, B, dan C himpunan bagian $\mathbb{R}$ dengan $A = \; x \mid x^3 = x$, $B = \; x \mid x^2 + x - 6 = 0$, dan $C = \; x \mid x^2 + 3x + 2 = 0$, maka:

14) $A \cap B = \varnothing$

A. Benar B. Salah

15) $(A \cap B) \cup C = \dots$

A. $\{-1,-2,1\}$ B. $\{-1,-2\}$

16) $(A \cup B) \cap C = \dots$

A. $\{-1,-2\}$ B. $\{-1\}$

17) $C-(A\cup B)$

A. $\{-2\}$ B. $\{-1\}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

KEGIATAN BELAJAR 2

Sistem Bilangan Real

Pada kegiatan Belajar 1 telah disinggung bahwa yang mendasari kalkulus khususnya buku materi pokok (BMP) Kalkulus I, Kalkulus II dan Kalkulus III adalah himpunan bilangan real. Untuk itu, pada Kegiatan Belajar 2 ini akan dibahas **sistem bilangan real** yang meliputi operasi dan sifat-sifatnya.

A. SISTEM BILANGAN REAL

Dalam himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan operasi **penambahan** "+" dan **perkalian** " . " yang **tertutup**, artinya apabila $x, y \in \mathbb{R}$ maka $x+y \in \mathbb{R}$ dan $x.y \in \mathbb{R}$. Untuk penulisan $x.y$ lebih sering ditulis xy saja. Operasi penambahan dan perkalian ini memenuhi sifat-sifat, yang disebut **medan bilangan real** berikut ini.

Sifat 1.2.1 (Sifat-sifat Medan Bilangan Real)

Untuk $x, y, z \in \mathbb{R}$ maka

1. sifat komutatif:
   a. $x+y=y+x$
   b. $x.y=y.x$
2. sifat asosiatif:
   a. $x+(y+z)=(x+y)+z$
   b. $x(yz)=(xy)z$
3. sifat distributif: $x(y+z)=xy+xz$
4. unsur satuan (identitas):
   a. 0 sehingga $x+0=x$ (penambahan)
   b. 1 sehingga $x.1=x$ (perkalian)
5. unsur invers (balikan):
   a. $\forall x \in \mathbb{R}$ ada invers $(-x)$ sehingga $x+(-x)=0$
   b. $\forall x \neq 0$ ada invers x^{-1} sehingga $x.x^{-1}=1$.

Operasi **pengurangan** dan **pembagian** didefinisikan sebagai berikut:

a. pengurangan: $x - y = x + (-y)$ (penambahan dengan inversnya)

b. Pembagian: $\dfrac{x}{y} = x.y^{-1}$ (perkalian dengan inversnya).

Untuk lebih memahami sifat-sifat medan bilangan real tersebut, mari kita lihat Contoh 1.2.1 berikut ini.

Contoh 1.2.1

Jika diketahui bilangan-bilangan $2\,, 3\,, 4\,, -4\,, \dfrac{1}{2} \in \mathbb{R}$ maka:

a. $2 + 3 = 6 = 3 + 2$ (Sifat 1.2.1.1.a)
$x + y \qquad y + x$

b. $2\ \ (3)(4)\ = 2(12) = 24 = (6)4 =\ (2)(3)\ \ 4$ (Sifat 1.2.1.2.b)
$x((y)(z)) \qquad ((x)(y))z$

c. $\frac{1}{2}\ \ 2 + 4\ = \frac{1}{2}(6) = 3 = 1 + 2 = \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{2}(4)$ (Sifat 1.2.1.3)
$x(y + z) \qquad x(y) + x(z)$

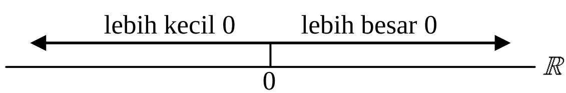
d. $(4)(1) = 4$ (Sifat 1.2.1.4.b)
$(x)(1) = x$

e. $4 - 3 = 4 + (-3) = 1$ (Operasi pengurangan)
$x - y = x + (-y)$

f. $-4 + 0 = -4$ (Sifat 1.2.1.4.a)
$x + 0 = x$

B. URUTAN

Himpunan bilangan real $\mathbb{R}$ dipisahkan oleh bilangan 0 menjadi dua bagian, yaitu bagian yang lebih besar 0 selanjutnya disebut **bilangan positif** dan bagian yang lebih kecil 0 selanjutnya disebut **bilangan negatif**.



Gambar 1.2.1
Garis Bilangan

Dari Gambar 1.2.1 mudah dipahami bahwa x **positif** jika **lebih besar** 0 dan x **negatif** jika jika **lebih kecil** 0. Secara umum, bilangan positif dan negatif didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.2.1

Dalam sistem bilangan real $\mathbb{R}$ didefinisikan relasi urutan "$<$" dibaca "lebih kecil dari", sebagai:

$$x < y \Leftrightarrow y - x \text{ } \textbf{positif}.$$

Tanda $\Leftrightarrow$ dibaca "jika dan hanya jika", artinya $x < y$ jika $y - x$ positif dan $y - x$ positif jika $x < y$.

Penulisan $x < y$ sama artinya dengan $y > x$, tanda "$>$" dibaca "lebih besar dari".

Contoh 1.2.2

(a) $3 < 5$ sama artinya dengan $5 > 3$. Di sini $5 - 3 = 2 > 0$, positif.

(b) $-5 < -4$ sama artinya dengan $-4 > -5$. Di sini $-4 - (-5) = 1 > 0$, positif.

(c) $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ sama artinya dengan $-\frac{1}{3} > -\frac{1}{2}$.
Di sini $-\frac{1}{3} - (-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{1}{6} > 0$, positif.

(d) $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ sama artinya dengan $\frac{1}{2} > \frac{1}{3}$. Di sini $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} > 0$, positif.

Di dalam sistem bilangan real berlaku sifat-sifat urutan seperti yang dituangkan pada Sifat 1.2.2 berikut ini.

Sifat 1.2.2 (Urutan)

1.	Trikhotomi	:	untuk setiap dua bilangan x dan y hanya berlaku salah satu dari hubungan, $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
2.	Transitif	:	jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
3.	Penambahan	:	$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4.	Pengalian	:	a. jika $z > 0$ maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ b. jika $z < 0$ maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

Di antara keempat sifat urutan tersebut yang perlu dicermati adalah perbedaan sifat 1.2.2.4.a dan sifat 1.2.2.4.b. Untuk itu kita lihat Contoh 1.2.3 berikut ini.

Contoh 1.2.3

Misalkan $x = 2$ dan $y = 4$, jelas bahwa $x < y$:

a. jika $z = 3 > 0$, maka $xz = (2)(3) = 6$ dan $yz = (4)(3) = 12$ sehingga $6 < 12$ (sifat 1.2.2.4.a);

b. jika $z = -3 < 0$, maka $xz = (2)(-3) = -6$ dan $yz = (4)(-3) = -12$ sehingga $-6 > -12$ (sifat 1.2.2.4.b, bagi yang kurang cermat ini biasanya digunakan sifat 1.2.2.4.a. sehingga $-6 < -12$, padahal salah).

Contoh 1.2.4

Jika $a > 0$ dan $b > 0$, buktikan $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

Bukti:

($\Rightarrow$) Diketahui $a < b$ akan dibuktikan bahwa $a^2 < b^2$.

$$\left.\begin{array}{l} a < b \text{ dan } a > 0 \overset{\text{sifat1.2.2.4.a}}{\Rightarrow} a^2 < ab \\ a < b \text{ dan } b > 0 \overset{\text{sifat1.2.2.4.a}}{\Rightarrow} ab < b^2 \end{array}\right\} \overset{\text{sifat1.2.2.3}}{\Rightarrow} a^2 < b^2 \text{ (terbukti).}$$

($\Leftarrow$) Diketahui $a^2 < b^2$, $a > 0$, dan $b > 0$ akan dibuktikan bahwa $a < b$.

$$a^2 < b^2 \overset{\text{sifat 1.2.2.3}}{\Rightarrow} a^2 - b^2 < b^2 - b^2 \Rightarrow a^2 - b^2 < 0 \Rightarrow (a-b)(a+b) < 0$$

Karena $a > 0$, dan $b > 0$ maka $(a+b) > 0$.

Karena $(a+b) > 0$ dan $(a-b)(a+b) < 0$ $\overset{\text{sifat 1.2.2.4.a}}{\text{maka}}$ $a - b < 0$.

Karena $a - b < 0 \overset{\text{sifat1.2.2.3}}{\Rightarrow} a - b + b < 0 + b \Rightarrow a < b$ (terbukti).

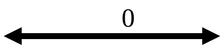
Selain relasi "$<$" dalam sistem bilangan real, juga didefinisikan relasi "$\leq$" dibaca "kecil atau sama".

$x \leq y \Leftrightarrow y - x$ positif atau nol.

$x \leq y$ sama artinya dengan $y \geq x$, notasi "$\geq$" dibaca "besar atau sama".

C. SELANG (INTERVAL)

Selang (interval) merupakan cara lain untuk penulisan himpunan bagian bilangan real, ditulis sebagai (..., ...) , (..., ...], [..., ...), atau [..., ...]. Notasi “(“ dan “)” selang buka ”[“ dan “]” selang tutup. Misalkan $[a,b)$, ini berarti a termasuk anggota selang sedangkan b **tidak** termasuk anggota selang.

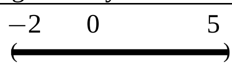
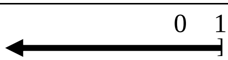
No	**Selang dan gambarnya**		**Himpunan**
1	(a,b)		$x \mid a < x < b$
2	$(a,b]$		$x \mid a < x \leq b$
3	$[a,b)$		$x \mid a \leq x < b$
4	$[a,b]$		$x \mid a \leq x \leq b$
5	$(-\infty,b]$		$x \mid x \leq b$
6	$(-\infty,b)$		$x \mid x < b$
7	$[a,\infty)$		$x \mid x \geq a$
8	(a,∞)		$x \mid x > a$
9	$(-\infty,\infty)$		$\mathbb{R}$

Contoh 1.2.5

Gambarkan selang dan penulisan himpunan dari:

a. $(-2,5)$, b. $(-\infty,1]$, c. $[-1,\infty)$, d. $(-5,-3]$, e. $[1,4]$

Jawab:

	Selang dan gambarnya		Himpunan
a.	$(-2,5)$		$x \mid -2 < x < 5$
b.	$(-\infty,1]$		$x \mid x \leq 1$

c.	$[-1,\infty)$		$x\|x \geq -1$
d.	$(-5,-3]$		$x\|-5 < x \leq -3$
e.	$[1,4]$		$x\|1 \leq x \leq 4$

D. PERTIDAKSAMAAN

Istilah lain **pertidaksamaan** adalah **pertaksamaan**. Untuk BMP ini kita menggunakan kata pertidaksamaan tetapi kalau ditemui kata pertaksamaan artinya sama saja. **Perbedaan** antara **pertidaksamaan** dan **persamaan**. Untuk membedakan antara pertidaksamaan dan persamaan, kita lihat Contoh 1.2.6 berikut ini.

Contoh 1.2.6

a. Berapa nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2x-4<0$.
b. Berapa nilai x yang memenuhi persamaan $2x-4=0$.
c. Berapa nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $-2x+4<0$

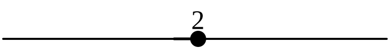
Jawab:

a. $2x-4<0 \overset{\text{sifat 1.2.2.3}}{\Rightarrow} 2x-4+4<0+4 \Rightarrow 2x<4 \overset{\text{sifat 1.2.2.4.a}}{\Rightarrow} x<2$ atau $(-\infty,2)$.

$(-\infty,2)$, jika ditulis bentuk himpunan $x|x<2$ atau $x<2$.

b.

$$2x-4=0 \overset{\text{Sifat 1.2.1.5.a}}{\Rightarrow} 2x-4+4=0+4 \Rightarrow 2x=4 \overset{\text{Sifat 1.2.1.5.b}}{\Rightarrow} 2(2^{-1})x=2(2)(2^{-1})$$
$$\Rightarrow x=2$$



$x=2$ ditulis bentuk himpunan 2

c. $-2x+4<0 \Rightarrow -2x+4+(-4)<0+(-4) \Rightarrow -2x<-4 \overset{\text{sifat1.2.2.4.b}}{\Rightarrow} x>2$.

(sifat1.2.2.3 is printed above the second arrow in c.)

$(2,\infty)$, jika ditulis bentuk himpunan $x \mid x > 2$ atau $x > 2$.

Jadi nilai x yang memenuhi **pertidaksamaan** berupa suatu **selang** dan nilai x yang memenuhi **persamaan** berupa **titik**.

Untuk selanjutnya, penggunaan Sifat-sifat 1.2.1 dan Sifat 1.2.2 untuk menjelaskan langkah pengerjaan seperti pada Contoh 1.2.6 tidak perlu dituliskan, tetapi harus betul-betul dipahami.

Contoh 1.2.7

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $5x-4<2x+10$.

Jawab:

$$5x-4<2x+11$$
$$3x<15$$
$$x<5$$

Contoh 1.2.8

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $2x-3<3x-10$.

Jawab:

$$2x-3<3x-10$$
$$2x-3x<-10+3$$
$$-x<-7$$
$$x>7$$

Contoh 1.2.9

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $5\le 2x+3<9$.

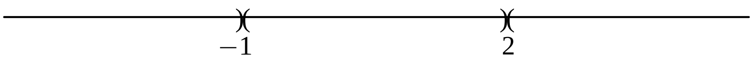
Jawab:

$$5\le 2x+3<9$$
$$2\le 2x<6$$
$$1\le x<3$$

Contoh 1.2.10a
Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $(x-2)(x+1)<0$.

Sebelum menjawab soal Contoh 1.2.10a, kita lihat terlebih dadulu teknik penyelesaian tipe contoh soal pertidaksamaan yang terdiri dari beberapa faktor secara umum berikut ini. Ada beberapa teknik penyelesaian. Di sini kita akan gunakan salah satu teknik, yaitu teknik titik-titik pemecah yang dijelaskan sebagai berikut.

Pandang pertidaksamaan $(x-2)(x+1)<0$ sebagai persamaan yaitu $(x-2)(x+1)=0$, sehingga persamaan ini memiliki penyelesaian $x_1=-1$ dan $x_2=2$. Selanjutnya titik $x_1=-1$ dan $x_2=2$ disebut **titik pemecah** (*split point*). Apabila digambarkan dalam garis bilangan maka titik-titik pemecah tersebut akan membentuk selang-selang $(-\infty,-1)$, $(-1,2)$, $(2,\infty)$ yang terlihat seperti berikut ini:



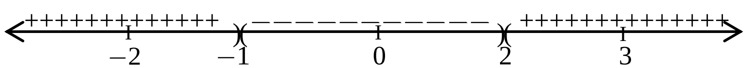
Kemudian ambil satu buah titik sembarang pada masing-masing selang, titik-titik sembarang ini selanjutnya disebut **titik uji** (*test point*). Misalnya $x=-2$ pada $(-\infty,-1)$, $x=0$ pada $(-1,2)$, dan $x=3$ pada $(2,\infty)$. Selanjutnya periksa nilai $(x-2)(x+1)$ pada titik-titik uji.

Titik uji $x=-2$ memberikan nilai $(-2-2)(-2+1)=(-4)(-2)=8>0$, selanjutnya pada selang $(-1,2)$ diberikan tanda "+".

Titik uji $x=0$ memberikan nilai $(0-2)(0+1)=-2<0$, selanjutnya pada selang $(-\infty,-1)$ diberikan tanda " $-$ ".

Titik uji $x=3$ memberikan nilai $(3-2)(3+1)=(1)(4)=4>0$, selanjutnya pada selang $(2,\infty)$ diberikan tanda "+".

Kemudian tanda "+", " $-$ ", dan "+" diletakkan pada selang-selang yang berkaitan, sehingga menghasilkan:

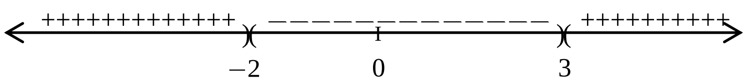


Karena tanda pertidaksamaan "$<$" maka nilai x yang memenuhi selang yang bertanda "$-$".
Jadi nilai x yang memenuhi pertidaksamaan adalah: $-1 < x < 2$.

Catatan:
- untuk pertidaksamaan bertanda "$>$", nilai x yang memenuhi adalah selang yang bertanda "+" ;
- untuk contoh selanjutnya, tanda "+" atau "$-$" cukup diperiksa pada salah satu selang yang mana saja, kemudian tanda berikutnya atau sebelumnya bergantian dari tanda pada selang yang diperiksa.

Contoh 1.2.10b
Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - x - 6 < 0$.

Jawab:
Bentuk pertidaksamaan dapat diubah: $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3) < 0$.
Sekarang kita selesaikan seperti Contoh 1.2.10a.
Titik pemecah $x = -2$ dan $x = 3$.
Ambil titik uji $x = 0$, maka $(0+2)(0-3) = -6 < 0$. Jadi, sekitar 0 yaitu pada $(-2,3)$ bertanda "$-$", selang sebelumnya $(-\infty,-2)$ bertanda "$+$" dan selang berikutnya $(3,\infty)$ bertanda "$+$".
Gambar garis bilangan :



Karena tanda pertidaksamaan "<" maka nilai x yang memenuhi adalah selang yang bertanda "$-$" yaitu $-2 < x < 3$ atau $(-2,3)$.

Contoh 1.2.11
Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $x^2 - 5x + 6 \geq 0$.

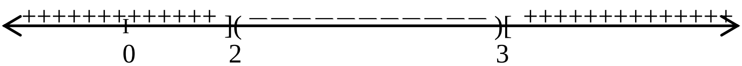
Jawab:

$$x^2 - 5x + 6 \geq 0$$

$(x-2)(x-3) \geq 0$, selanjutnya diselesaikan seperti Contoh 1.2.10a dan Contoh 1.2.10b.

Titik pemecah $x_1 = 2$ dan $x_2 = 3$, selang yang terjadi $(-\infty, 2], [2, 3]$ dan $[3, \infty)$.

Ambil titik uji $x = 0$ di selang $(-\infty, 2]$, maka $(0-2)(0-3) = 6 > 0$ sehingga pada selang $(-\infty, 2]$ bertanda "+", selang berikutnya $[2, 3]$ bertanda "$-$", selang berikutnya $[3, \infty)$ bertanda "+". Jadi untuk seluruh selang akan bertanda:



Karena tanda pertidaksamaan "$\geq$" maka nilai x yang memenuhi adalah selang yang bertanda "+" yaitu $\{-\infty < x \leq 2 \cup 3 \leq x < \infty\}$ atau $(-\infty, 2] \cup [3, \infty)$.

Contoh 1.2.12

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\dfrac{(x-1)}{(x-2)} < 0$

Sebelum menjawab persoalan Contoh 1.2.12, terlebih dahulu kita bandingkan **tanda pertidaksamaan** dari hasil **pembagian** dan **perkalian** dua buah bilangan yang **sama** pada Tabel 1.2.1 berikut ini.

Tabel 1.2.1

No.	pembagian	perkalian	tanda pertidaksamaan
1.	$\frac{8}{4} = 2 > 0$	$(8)(4) = 32 > 0$	"$>$"
2.	$\frac{-8}{4} = -2 < 0$	$(-8)(4) = -32 < 0$	"$<$"
3.	$\frac{8}{-4} = -2 < 0$	$(8)(-4) = -32 < 0$	"$<$"
4.	$\frac{-8}{-4} = 2 > 0$	$(-8)(-4) = 32 > 0$	"$>$"

Ternyata dua bilangan sama apabila dilakukan operasi pembagian atau perkalian memberikan tanda pertidaksamaan yang sama pula. Secara umum perkalian atau pembagian dua bilangan tidak mengubah tanda pertidaksamaan yang dapat dilihat pada Tabel 1.2.2 berikut ini.

Tabel 1.2.2

No.	pembagian	perkalian	tanda pertidaksamaan
1.	$\frac{\text{positif}}{\text{positif}} > 0$	$(\text{positif})(\text{positif}) > 0$	"$>$"
2.	$\frac{\text{negatif}}{\text{positif}} < 0$	$(\text{negatif})(\text{positif}) < 0$	"$<$"
3.	$\frac{\text{positif}}{\text{negatif}} < 0$	$(\text{positif})(\text{negatif}) < 0$	"$<$"
4.	$\frac{\text{negatif}}{\text{negatif}} > 0$	$(\text{negatif})(\text{negatif}) > 0$	"$>$"

Dari Tabel 1.2.2 maka pertidaksamaan **pembagian** $\frac{(x-1)}{(x-2)} < 0$ dapat diubah menjadi pertidaksamaan **perkalian** $(x-1)(x-2) < 0$.

Pengerjaan selanjutnya seperti pada Contoh 1.2.10a dan Contoh 1.2.10b, silahkan dicoba sendiri, hasilnya $(1,2)$ atau $1 < x < 2$.

Contoh 1.2.13

Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan: $\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-3)} > 0$

Jawab:

$\frac{(x-1)(x+1)}{(x+2)(x-3)} > 0$ berdasarkan Tabel 1.2.2 maka dapat diubah menjadi

$(x-1)(x+1)(x+2)(x-3) > 0$.

:::

+++ -2 - - - -1 +++ 1 - - - 3 +++

Anda diharapkan dapat melanjutkan sendiri dan akhirnya diperoleh:
$x < -2 \cup -1 < x < 1 \cup x > 3$ atau $(-\infty,-2)\cup(-1,1)\cup(3,\infty)$.

F. NILAI MUTLAK

Definisi 1.2.2 (Nilai Mutlak)

Nilai mutlak a, ditulis $|a|$ dan didefinisikan:

$$|a| = \begin{cases} a\ , \text{ jika } a \geq 0 \\ -a, \text{ jika } a < 0 \end{cases}.$$

Dari definisi ini terlihat bahwa nilai $|a|$ akan selalu positif atau 0, tidak pernah negatif.

Contoh 1.2.14

a. $|2| = 2$

b. $|0| = 0$

c. $|-2| = -(-2) = 2$

f. $\left|\sqrt{5} - 2\right| = \sqrt{5} - 2$

d. $|3+4| = |7| = 7$

d. $|4-3| = |1| = 1$

e. $|3-4| = |-1| = -(-1) = 1$

g. $\left|1-\sqrt{3}\right| = -(1-\sqrt{3}) = \sqrt{3} - 1$

Sifat 1.2.3 (Nilai Mutlak)

a. $\pm a \leq |a|$

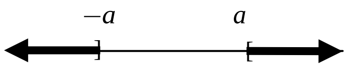
b. $|ab| = |a||b|$

c. $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$, $b \neq 0$

d. $|a+b| \leq |a| + |b|$

e. $|a-b| \leq |a-b|$

Sifat 1.2.4 (Pertidaksamaan dalam Nilai Mutlak)

a.	$\lvert x\rvert < a \Leftrightarrow -a < x < a$	
b.	$\lvert x\rvert > a \Leftrightarrow x < -a \cup x > a$	
c.	$\lvert x\rvert \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a$	
d.	$\lvert x\rvert \geq a \Leftrightarrow x \leq -a \cup x \geq a$	

Catatan: a. $|a| = \sqrt{a^2}$

b. $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$

Contoh 1.2.15

Tentukan nilai x yang memenuhi $|2x-1| < 3$

Jawab:

$$|2x-1| < 3$$
$$-3 < 2x-1 < 3 \quad \text{[sifat pertidaksamaan a.]}$$
$$-2 < 2x < 4$$
$$-1 < x < 2$$

Contoh 1.2.16

Tentukan nilai x yang memenuhi $|2x-1| \geq 5$

Jawab:

$$|2x-1| \geq 5$$
$$2x-1 \leq -5 \ \cup \ 2x-1 \geq 5 \quad \text{[Sifat 1.2.4d]}$$
$$2x \leq -4 \ \cup \ 2x \geq 6$$
$$x \leq -2 \ \cup \ x \geq 3$$

Contoh 1.2.17

Tentukan nilai x yang memenuhi $|x-1| \leq |2x+4|$

Jawab:

$$|x-1| \leq |2x+4|$$

$(x-1)^2 \leq (2x+4)^2$ [***Catatan*** : a. pada Sifat 1.2.4]

$$x^2 - 2x + 1 \leq 4x^2 + 16x + 16$$
$$-3x^2 - 18x - 15 \leq 0$$

$x^2 + 6x + 5 \geq 0$ [ingat, perkalian dengan bilangan negatif akan mengubah tanda pertidaksamaan]

$(x+1)(x+5) \geq 0$ dan seterusnya ....

Anda dapat melanjutkan sendiri, kalau lupa, lihat Contoh 1.2.11.

G. PENGENALAN BILANGAN KOMPLEKS

Himpunan bilangan yang paling lengkap pada diagram hierarki himpunan bilangan adalah himpunan bilangan kompleks. Bilangan kompleks berbentuk: $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ dan $i = \sqrt{-1}$ atau $i^2 = -1$. Himpunan bilangan kompleks, ditulis:

$$\mathbb{C} = \; z \big| z = a + bi \; ; \; a, b \in \mathbb{R} \; ; i = \sqrt{-1} \text{ atau } i^2 = -1$$

Pada himpunan kompleks juga didefinisikan operasi penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

Misalkan, $z_1 = a + bi$ dan $z_2 = c + di$ maka:

a. $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

b. $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

c. $(z_1)(z_2) = (a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$

d. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} = \frac{(a + bi)}{(c + di)} \cdot \frac{(c - di)}{(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2}$$

$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} i \; .$$

Contoh 2.2.18

Diketahui $z_1 = 2 + 3i$ dan $z_2 = 5 - 2i$

Hitung: a. $z_1 + z_2$ b. $z_1 - z_2$ c. $z_2 - z_1$

d. $z_1 z_2$ e. $\frac{z_1}{z_2}$ f. $\frac{z_2}{z_1}$.

Jawab:

a. $z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (5 - 2i) = 7 + i$.

b. $z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (5 - 2i) = -3 + 5i$.

c. $z_2 - z_1 = (5 - 2i) - (2 + 3i) = 3 - 5i$.

d. $z_1 z_2 = (2 + 3i)(5 - 2i) = \; 10 - (-6) \; + (-4 + 15)i = 16 + 11i$

e. $$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{5 - 2i} = \frac{2 + 3i}{5 - 2i} \cdot \frac{5 + 2i}{5 + 2i} = \frac{(10 - 6) + (15 + 4)i}{25 + 4} = \frac{4 + 19i}{29}$$

$$= \frac{4}{29} + \frac{19}{29} i \; .$$

f. $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{5-2i}{2+3i} = \dfrac{5-2i}{2+3i} \cdot \dfrac{2-3i}{2-3i} = \dfrac{(10-6)+(-4-15)i}{4+9} = \dfrac{4-19i}{13}$

$$= \frac{4}{13} - \frac{19}{13}i\,.$$

Pada kalkulus, bilangan kompleks hanya diberikan sebagai pengenalan saja, sekedar menunjukkan bahwa selain sistem bilangan real yang digunakan pada kalkulus masih ada sistem bilangan lain yaitu sistem bilangan kompleks. Bagi Anda yang ingin mempelajari tentang sistem bilangan kompleks lebih lanjut dipersilahkan mempelajari BMP Fungsi Kompleks/MATA 4322.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan nilai x yang memenuhi:
   a. $x+10 < 2x-5$
   b. $x+10 > 2x-5$
2) Tentukan nilai x yang memenuhi:
   a. $(2x-6)(x+2) < 0$
   b. $(2x-6)(x+2) > 0$
3) Tentukan nilai x yang memenuhi:
   a. $x^2+2x-3 \le 0$
   b. $x^2+2x-3 \ge 0$
4) Tentukan nilai x yang memenuhi:
   a. $(x-1)(x-2)^2(x+2) \le 0$
   b. $(x-1)(x-2)^2(x+2) \ge 0$
5) Tentukan nilai x yang memenuhi pertidaksamaan:
   a. $\dfrac{2x-2}{x+3} < 1\,.$
   b. $\dfrac{2x-2}{x+3} > 1$

6) Tentukan nilai x yang memenuhi:

a. $|2x-1|<5$

b. $|2x-1|>5$

7) Tentukan nilai x yang memenuhi $|x-1|>|2x+4|$

Petunjuk Jawaban Latihan

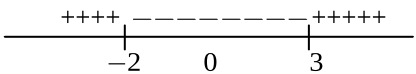
1). a. $x+10<2x-5$
$-x<-15$
$x>15$

b) $x+10>2x-5$
$-x>-15$
$x<15$

2) a. $(2x-6)(x+2)<0$

Titik pemecah : $x_1=3$ dan $x_2=-2$.

Ambil $x=0 \Rightarrow (2(0)-6)(0+2)=-12<0$, sehingga daerah sekitar 0 bernilai "$-$", daerah sebelum titik pemecah dan daerah setelah titik pemecah bernilai "+".



Jadi nilai x yang memenuhi (daerah $-$) : $-2<x<3$.

b. Caranya seperti nomor a., tetapi nilai x yang memenuhi (daerah +): $x<-2 \cup x>3$.

3) a. $x^2+2x-3 \le 0$
$(x+3)(x-1) \le 0$
Selanjutnya dikerjakan seperti No.2)a.

b. $x^2+2x-3 \ge 0$
$(x+3)(x-1) \ge 0$
Selanjutnya dikerjakan seperti No. 2)b.

4) a. $(x-1)(x-2)^2(x+2)\leq 0$

Nilai $(x-2)^2 \geq 0$, sehingga jika kedua ruas pertidaksamaan dibagi $(x-2)^2$ tidak mengubah tanda pertidaksamaan.

Jadi,

$(x-1)(x-2)^2(x+2)\leq 0$

$(x-1)(x+2)\leq 0$

dan seterusnya ...., silahkan dilanjutkan.

b. $(x-1)(x-2)^2(x+2)\geq 0$

$(x-1)(x+2)\geq 0$

dan seterusnya ...., silahkan dilanjutkan.

5) a. $\dfrac{2x-2}{x+3}<1$

$\dfrac{2x-2}{x+3}-1<0$

$\dfrac{(2x-2)-1(x+3)}{(x+3)}<0$

$\dfrac{(x-5)}{(x+3)}<0$, selanjutnya dikerjakan seperti Contoh 1.2.11.

b. $\dfrac{2x-2}{x+3}>1$, selanjutnya dikerjakan seperti 5)a.

6) a. $|2x-1|<5 \Leftrightarrow -5<2x-1<5 \Leftrightarrow -4<2x<6 \Leftrightarrow -2<x<3$.

b. $|2x-1|>5 \Leftrightarrow 2x-1<-5 \cup 2x-1>5 \Leftrightarrow 2x<-4 \cup 2x>6$

$\Leftrightarrow x<-2 \cup x>3$.

7) $|x-1|>|2x+4| \Leftrightarrow (x-1)^2>(2x+4)^2 \Leftrightarrow x^2-2x+1>4x^2+16x+16$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1>4x^2+16x+16$

$\Leftrightarrow -3x^2-18x-15>0$

$\Leftrightarrow x^2+6x+5>0$, selanjutnya dikerjakan seperti 3)b.

RANGKUMAN

1. **Sifat-sifat Medan Bilangan Real**

Untuk $x, y, z \in \mathbb{R}$ maka berlaku:

1. sifat komutatif:
   a. $x + y = y + x$
   b. $x.y = y.x$
2. sifat asosiatif:
   a. $x + (y + z) = (x + y) + z$
   b. $x(yz) = (xy)z$
3. sifat distributif: $x(y + z) = xy + xz$
4. unsur satuan (identitas):
   a. 0 sehingga $x + 0 = x$
   b. 1 sehingga $x.1 = x$
5. unsur invers (balikan):
   a. $\forall x \in \mathbb{R}$ ada invers $(-x)$ sehingga $x + (-x) = 0$
   b. $\forall x \neq 0$ ada invers x^{-1} sehingga $x.x^{-1} = 1$.

2. **Sifat-sifat Urutan**

1.	rikotomi	:	untuk setiap dua bilangan x dan y hanya berlaku salah satu dari hubungan, $x < y$ atau $x = y$ atau $x > y$.
2.	Transitif	:	jika $x < y$ dan $y < z$ maka $x < z$.
3.	Penambahan	:	$x < y \Leftrightarrow x + z < y + z$.
4.	Pengalian	:	a. jika $z > 0$ maka $x < y \Leftrightarrow xz < yz$ b. jika $z < 0$ maka $x < y \Leftrightarrow xz > yz$.

3. **Nilai Mutlak**

Nilai mutlak a, ditulis $|a|$ dan didefinisikan:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jika } a \geq 0 \\ -a, & \text{jika } a < 0 \end{cases}$$

TES FORMATIF 2

Pilihlah satu jawaban yang paling tepat!

1) Nilai x yang memenuhi $x+10>2x-5$ adalah ....
   A. $x>15$ B. $x<15$

2) Nilai x yang memenuhi: $-2x+4<3$ adalah ....
   A. $x>\frac{1}{2}$ B. $x<\frac{1}{2}$

3) Nilai x yang memenuhi: $(2x-3)(x+2)>0$ adalah ....
   A. $x<-2 \cup x>\frac{3}{2}$ B. $-2<x<\frac{3}{2}$

4) Nilai x yang memenuhi: $x^2-x-20\leq 0$ adalah ....
   A. $x\leq -4 \cup x\geq 5$ B. $-4\leq x\leq 5$

5) Nilai x yang memenuhi: $x^2(x^2-4)>0$ adalah ....
   A. $x<-2 \cup x>2$ B. $-2<x<2$

6) Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{1}{x}>1$ adalah $0<x<1$
   A. Benar B. Salah

7) Nilai x yang memenuhi pertidaksamaan $\frac{(x-1)(x-2)^2}{(x+1)}\geq 0$:
   A. $-1\leq x\leq 1$ B. $x\leq -1 \cup x\geq 1$

8) Nilai x yang memenuhi $|2x-1|\leq 1$ adalah ...
   A. $x\leq 0 \cup x\geq 1$ B. $0\leq x\leq 1$

9) Nilai x yang memenuhi $|3x-2|>4$ adalah ....
   A. $x<-\frac{2}{3} \cup x>2$ B. $-\frac{2}{3}<x<2$

10) Nilai x yang memenuhi $|x-1|>|x|$ adalah ....
   A. $x>\frac{1}{2}$ B. $x<\frac{1}{2}$

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) A
2) B
3) A
4) B
5) B
6) B
7) A
8) A
9) B
10) A
11) B
12) B
13) A
14) A
15) B
16) B
17) A

Tes Formatif 2

1) B
2) A
3) A
4) B
5) A
6) A
7) B
8) B
9) A
10) B

Daftar Pustaka

Faires, J. Douglas dan Barbara T., Faires. 1988. *Calculus*, second edition. New York: Random Hause, Inc.

Goldstein, Larry J, Lay, David C dan Schneider, David I. 2001. *Calculus and Its Applications*, ninth edition. New Jersey: Prentice Hall.

Leithold. 1988. *Kalkulus dan Ilmu Ukur Analitik*. Alih bahasa S.M. Nababan dkk., edisi kelima jilid 2. Jakarta: Penerbit Erlangga.

Purcell, Edwin J dan Dale Varberg. 1992. *Kalkulus dan Geometri Analitis*. Alih bahasa I Njoman Susila, Bana Kartasasmita dan Rawuh, Edisi keempat Jilid I. Jakarta: Penerbit Erlangga.