MODUL 1

Ruang Vektor

Dr. Irawati

PENDAHULUAN

Dalam buku materi pokok Aljabar II ini kita secara perlahan-lahan mulai mengubah pendekatan kita dari pendekatan secara *komputasi* menjadi pendekatan yang lebih *umum*. Yang dimaksud dengan pendekatan yang lebih umum adalah penyelesaian masalah yang menuntut bukti, yang tentu saja tidak dapat diselesaikan dengan komputasi rutin. Namun, pendekatan komputasi tidak sepenuhnya kita tinggalkan, melainkan kita pakai untuk mengilustrasikan dan menerapkan teori yang kita bahas.

Pembaca diminta untuk mengerjakan semua soal-soal latihan maupun tes formatif (termasuk menuliskannya dengan rinci), untuk dapat mengikuti semua modul secara utuh dan berkesinambungan.

Secara khusus untuk modul (pokok bahasan) Ruang Vektor ini, skalar yang digunakan lebih umum, yakni himpunan yang memiliki struktur yang sama dengan struktur yang dimiliki oleh himpunan bilangan real.

Secara umum setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan memahami konsep *lapangan*, *ruang* $\mathbb{F}^p$, *ruang vektor* maupun *subruang* dan dapat memeriksa apakah suatu himpunan vektor-vektor di suatu ruang vektor bersifat *bebas linear* atau *bergantung linear*.

Secara lebih rinci, setelah mempelajari modul ini, Anda diharapkan mampu:

1. memahami konsep lapangan dan ruang $\mathbb{F}^p$;
2. menyelidiki apakah suatu vektor merupakan kombinasi linear dari vektor-vektor yang diberikan;
3. menyelidiki apakah suatu himpunan merupakan suatu ruang vektor atas suatu lapangan;
4. menyelidiki apakah suatu subhimpunan dari suatu ruang vektor merupakan subruang;

5. menentukan suatu himpunan bersifat bebas linear atau bergantung linear.

KEGIATAN BELAJAR 1

Lapangan, Ruang $\mathbb{F}^p$, dan Ruang Vektor

Pada mata kuliah *Aljabar Linear Elementer* kita telah menggunakan himpunan bilangan nyata (*real*) sebagai skalar. Sebagaimana dinyatakan sebelumnya pada modul ini, skalar yang digunakan *lebih umum*, yaitu himpunan yang memiliki struktur yang sama dengan struktur yang dimiliki himpunan bilangan real, yang kita katakan lapangan (*field*) dengan notasi $\mathbb{F}$.

Mari kita perhatikan mengenai persyaratan atau ketentuan-ketentuan dari suatu lapangan $\mathbb{F}$ yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 1.1
Suatu *lapangan* adalah suatu himpunan tak hampa $\mathbb{F}$ dengan *dua operasi*, yaitu *penjumlahan* dan *perkalian* serta terdapat unsur 0 (nol) dan 1 (satu) di $\mathbb{F}$ sehingga dipenuhi:

(i) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, berlaku
1. $x + y \in \mathbb{F}$ (*sifat tertutup*)
2. $x + y = y + x$ (*sifat komutatif*)
3. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (*sifat asosiatif*)
4. $0 + x = x$ (*unsur nol*)

(ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, berlaku
1. $xy \in \mathbb{F}$ (*sifat tertutup*)
2. $xy = yx$ (*sifat komutatif*)
3. $(xy)z = x(yz)$ (*sifat asosiatif*)
4. $1x = x$ (*unsur satu*)

(iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{F}$, $x(y + z) = xy + xz$ (*Sifat distributif*)

(iv) $\forall x \in \mathbb{F}$ terdapat secara tunggal $z \in \mathbb{F}$ sehingga $x + z = 0$.
(*z disebut unsur balikan dari x terhadap operasi penjumlahan*).

(v) $\forall x \in \mathbb{F}$, dengan $x \neq 0$ terdapat secara tunggal $y \in \mathbb{F}$ sehingga $xy = 1$ (*y dikatakan unsur balikan dari x terhadap operasi perkalian*).

Dari definisi di atas terlihat bahwa, suatu lapangan adalah suatu himpunan tak hampa yang berkaitan dengan dua operasi dan memenuhi sifat-sifat (i) s/d (v). Sebagai ilustrasi dari Definisi 1.1, perhatikan contoh berikut:

Contoh 1.1

Lapangan yang kita kenal adalah $\mathbb{R}$ = {*bilangan yang nyata/real*}, $\mathbb{Q}$ = {*bilangan rasional*}, dan $\mathbb{C}$ = {*bilangan kompleks*} terhadap dua operasi, yaitu penjumlahan dan perkalian. Tetapi, himpunan bilangan bulat $\mathbb{Z}$ *bukan* merupakan lapangan terhadap dua operasi penjumlahan dan perkalian karena terdapat bilangan bulat $a \neq 0$ dan $a \neq 1$, tetapi tidak terdapat bilangan bulat b sehingga $ab = 1$ [lihat sifat (v)]. ■

Pandang lapangan $\mathbb{F}$ seperti ruang $\mathbb{R}^n$, yang kita bahas pada mata kuliah Aljabar Linear Elementer, sekarang kita definisikan *ruang* $\mathbb{F}^p$ sebagai berikut.

$$\mathbb{F}^p = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} \middle| \ \alpha_1, \cdots, \alpha_p \in \mathbb{F} \right\}$$

Definisi di atas menyatakan bahwa ruang $\mathbb{F}^p$ adalah suatu himpunan vektor-vektor, dengan komponen sebanyak p buah dan setiap komponennya merupakan unsur dari lapangan $\mathbb{F}$.

Selanjutnya, dua operasi *penjumlahan* dan *perkalian skalar* juga kita definisikan seperti di $\mathbb{R}^n$, sebagai berikut.

1. Operasi Penjumlahan (+)

$$+ : \mathbb{F}^p \times \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^p$$

$$\left(\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \right) \mapsto \begin{bmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_p + \beta_p \end{bmatrix}$$

2. Operasi Perkalian Skalar $(\circ)$

$$\circ : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^p \to \mathbb{F}^p$$

$$\left(\alpha, \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix}\right) \mapsto \alpha \circ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha\alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha\alpha_p \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan dua operasi di atas, kita simak suatu definisi tentang *konsep kombinasi* linear dari vektor-vektor di $\mathbb{F}^p$.

> **Definisi 1.2**
> Misalkan $v_1, \ldots, v_n$ adalah vektor-vektor di $\mathbb{F}^p$ dan $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ adalah skalar-skalar di $\mathbb{F}$. Vektor di $\mathbb{F}^p$ yang berbentuk $w = \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ dikatakan *kombinasi linear* dari $v_1, \ldots, v_n$.

Selanjutnya, himpunan *semua* kombinasi linear dari $v_1, \ldots, v_n$ dikatakan *span* dari $v_1, \ldots, v_n$ dan ditulis

$$span\,\{v_1, \ldots, v_n\} = \{\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}\}$$

Ilustrasi untuk konsep *kombinasi linear* dan *span* yang didefinisikan di atas, akan diperlihatkan pada contoh di bawah ini.

Contoh 1.2
Pandang vektor-vektor di $\mathbb{R}^4$ berikut.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Karena $v_1 = 2v_3 + 2v_4 - v_5$ $(\alpha_1 = 2,\ \alpha_2 = 2$ dan $\alpha_3 = -1)$ maka v_1 merupakan kombinasi linear dari v_3, v_4 dan v_5.
Jadi, $v_1 \in$ *span* $\{v_3, v_4, v_5\}$, tetapi $v_2 \notin$ *span* $\{v_3, v_4, v_5\}$, karena Sistem Persamaan Linear (SPL) berikut:

$$\begin{cases} \alpha & = 2 \\ \quad \beta + \gamma & = 1 \\ \quad 2\beta + \gamma & = 2 \\ \alpha & = 1 \end{cases}$$

tidak memiliki solusi, dengan kata lain v_2 tak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari v_3, v_4 dan v_5.

■

Pandang himpunan $\mathbb{F}^p$, yang telah dibahas di atas, beserta operasi *penjumlahan* dan *perkalian skalar*. Maka, dapat ditunjukkan bahwa:

(i) $\forall u, v, w \in \mathbb{F}^p$ berlaku sifat-sifat berikut:

1. $u + v \in \mathbb{F}^p$ (*sifat tertutup*)
2. $u + v = v + u$ (*sifat komutatif*)
3. $(u + v) + w = u + (v + w)$ (*sifat asosiatif*)
4. $\exists \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^p \ni \vec{0} + u = u$ (*vektor nol*)
5. $\exists -u \in \mathbb{F}^p \ni u + (-u) = \vec{0}$ (*$-u$ vektor balikan dari u*)

(ii) $\forall u, v \in \mathbb{F}^p$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku

1. $\alpha u \in \mathbb{F}^p$
2. $1 \,.\, v = v$
3. $\alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v$
4. $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v$
5. $(\alpha\beta)v = \alpha(\beta v)$

Kita katakan bahwa $\mathbb{F}^p$ merupakan suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$.

Berikut ini akan kita definisikan pengertian ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$ secara umum.

Definisi 1.3
Suatu ruang *vektor V atas lapangan* $\mathbb{F}$ adalah himpunan *tak hampa V*, yang memuat vektor $\vec{0}$ dan dilengkapi dengan *operasi penjumlahan* dan *perkalian skalar* sehingga dipenuhi:

(i) $\forall u, v, w, \in V$, berlaku

$$\begin{cases} 1.\ u + v \in V & (\textit{sifat tertutup}) \\ 2.\ u + v = v + u & (\textit{sifat komutatif}) \\ 3.\ (u + v) + w = u + (v + w) & (\textit{sifat asosiatif}) \\ 4.\ \vec{0} + u = u & (\textit{vektor nol}) \\ 5.\ \exists -u \in V \ni u + (-u) = \vec{0} & (-u \textit{ vektor balikan dari } u) \end{cases}$$

(ii) $u, v, \in V$ dan $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ berlaku

$$\begin{cases} 1.\ \alpha u \in V & \\ 2.\ 1 . v = v & \\ 3.\ \alpha(u + v) = \alpha u + \alpha v & (\textit{sifat distributif}) \\ 4.\ (\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v & (\textit{sifat distributif}) \\ 5.\ (\alpha\beta)v = \alpha(\beta v) & \end{cases}$$

Untuk selanjutnya yang dimaksud dengan *ruang vektor* adalah *ruang vektor atas lapangan* $\mathbb{F}$. Dengan lapangan $\mathbb{F}$ adalah ¡ atau £ , *kecuali* dengan keterangan yang lebih spesifik.

Setelah kita paham dengan apa yang dimaksud dengan ruang vektor, mari kita lihat salah satu sifat yang berlaku di ruang vektor pada teorema berikut.

Teorema 1.1
Misalkan *V* suatu *ruang vektor*. Maka untuk $0, -1 \in \mathbb{F}$ berlaku:

(i) $0v = \vec{0}, \qquad \forall v \in V$

(ii) $(-1)v = -v, \qquad \forall v \in V$

Bukti:
Misalkan $v \in V$ sebarang, maka

(i) $0v = (0+0)v = 0v + 0v$ (*sifat distributif*)

$$0v + (-(0v)) = (0v + 0v) + (-(0v))$$
$$\vec{0} = 0v + \left(0v + \left(-(0v)\right)\right) \quad (\textit{vektor balikan dari 0v})$$
$$\vec{0} = 0v + \vec{0}$$
$$\vec{0} = 0v \quad (\textit{vektor nol})$$

(ii) $\vec{0} = 0v = \left(1 + (-1)\right)v = 1.v + (-1)v$

$$\vec{0} = v + (-1)v$$
$$-v + \vec{0} = -v + v + (-1)v$$
$$-v = (-v + v) + (-1)v$$
$$-v = \vec{0} + (-1)v$$
$$-v = (-1)v$$

■

Sekarang timbul pertanyaan, apakah subhimpunan dari suatu ruang vektor juga merupakan ruang vektor? Untuk itu, mari kita simak definisi di bawah ini.

Definisi 1.4
Pandang *subhimpunan tak hampa U* dari suatu ruang vektor *V*. Kita katakan *U* sebagai *subruang* dari *V*, jika *U* juga merupakan ruang vektor dengan *operasi yang sama* seperti operasi di *V*.

Sekarang akan kita lihat suatu *lemma* yang lebih operasional untuk menyelidiki apakah suatu *subhimpunan tak hampa* dari suatu ruang vektor merupakan *subruang* dari ruang vektor tersebut.

Lemma 1.1
Suatu *subhimpunan tak hampa U* dari suatu ruang vektor *V* merupakan suatu *subruang*, jika dan hanya jika,
(i) jika $u_1, u_2 \in U$ maka $u_1 + u_2 \in U$
(ii) jika $\alpha \in \mathbb{F}$ dan $u \in U$, maka $\alpha u \in U$.

Bukti:
Misalkan V suatu ruang vektor dan U adalah *subruang* dari V maka U juga merupakan ruang vektor (*berdasarkan Definisi* 1.4), sehingga (i) dan (ii) jelas dipenuhi.

Sebaliknya, misalnya (i) dan (ii) dipenuhi untuk $U \subseteq V$. Karena U tak hampa maka terdapat $u \in U$. Dari Teorema 1.1 maka $0u = \vec{0} \in U$ (*karena V suatu ruang vektor*). Sifat-sifat ruang vektor dan sifat-sifat yang lain jelas dipenuhi. Jadi, U merupakan subruang dari ruang vektor V. ■

Untuk pemahaman lebih lanjut tentang konsep ruang dan subruang vektor maupun konsep-konsep yang berhubungan dengan ruang dan subruang vektor ini, baik kita perhatikan beberapa ilustrasi pada Contoh 1.3 di bawah ini.

Contoh 1.3

(1) Misalkan A suatu matriks, dengan unsur pada lapangan $\mathbb{F}$, berukuran $m \times n$. Pandang ruang baris A yaitu *span*$\{r_1, \cdots, r_m\}$, dengan merupakan $r_1, \cdots, r_m$ baris matriks A.
Maka s*pan* $\{r_1, \cdots, r_m\}$ merupakan subruang dari $\mathbb{F}^n$. Ruang kolom A yaitu *Span* $\{k_1, \cdots, k_n\}$, dengan $k_1, \cdots, k_n$ merupakan kolom-kolom matriks A, merupakan subruang dari $\mathbb{F}^m$. ■

(2) Pandang himpunan P yang diekspresikan sebagai

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n$$

dengan $\alpha_0\, \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{F}$ dan n *bilangan bulat positif.*
Operasi penjumlahan dan perkalian skalar didefinisikan sebagai berikut:

$$(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \alpha_n x^n) + (\beta_0 + \beta_1 x + \cdots + \beta_{s-1} x^{s-1} + \beta_s x^s)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \alpha_i x^i + \sum_{i=0}^{s} \beta_i x^i = \sum_{i=0}^{m} (\alpha_i + \beta_i) x^i, \text{ dengan } m = maks\,(n,s)$$

$$\alpha(\alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \alpha_n x^n) = \alpha\sum_{i=0}^{n}\alpha_i x^i = \sum_{i=0}^{n}\alpha\alpha_i x^i.$$

Maka, dengan operasi seperti di atas, P merupakan ruang vektor dan disebut ruang suku banyak berderajat hingga.

(3) Pandang $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ = *himpunan semua matriks berukuran m × n dengan unsur di* $\mathbb{F}$. Dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar biasa, $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ merupakan suatu ruang vektor.

Misalkan $K = \{ A \in M_{m\times n}(\mathbb{F}) \mid A^t = -A \} \subset M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

Akan kita selidiki apakah K merupakan subruang dari $M_{m\times n}(\mathbb{F})$. Jelas, $K \neq \varnothing$, karena matriks O berukuran $m\times n$ merupakan unsur K.

Misalkan $A, B \in K$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$. Berarti $A^t = A$ dan $B^t = -B$.

$$(A+B)^t = A^t + B^t = -A + -B = -(A+B) = -(A+B)$$
$$(\alpha A)^t = \alpha A^t = \alpha(-A) = -(\alpha A).$$

Berarti $A + B \in K$ dan $\alpha A \in K$.
Jadi, K merupakan subruang dari $M_{m\times n}(\mathbb{F})$.

(4) Misalkan $L = \{ A \in M_{2\times 2}(\mathbb{F}) \mid A^{-1}\ ada \} \subset M_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

Pandang

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A^{-1} \text{ ada, berarti } A \in L$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B^{-1} \text{ ada, berarti } B \in L$$

Tetapi $A + B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tak memiliki invers, berarti $A + B \notin L$.

Jadi, L *bukan* merupakan subruang dari $M_{2\times 2}(\mathbb{F})$.

(5) Pandang $V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \;\; pemetaan \right\}$

Didefinisikan operasi penjumlahan dan perkalian skalar sebagai berikut:
Misalkan f dan g di V; $\alpha \in \mathbb{R}$ maka

1) $(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}$
2) $(\alpha f)(x) = \alpha\big(f(x)\big), \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Pandang $O \in V$ dengan: $\begin{cases} O : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto 0, \; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Misalkan $f \in V$ sebarang maka

$$\big(O + f\big)(x) = O(x) + f(x) = 0 + f(x) = f(x), \;\; \forall x \in \mathbb{R}$$

Jadi, kita mempunyai $O + f = f, \;\; \forall f \in V$.

Pandang $-f \in V$ dengan: $\begin{cases} -f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \quad x \mapsto -\big(f(x)\big), \; \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$

Maka $\big(f + (-f)\big)(x) = f(x) + (-f)(x)$
$= f(x) + \big(-(f(x)\big) = 0 = O(x), \forall x \in \mathbb{R}$
Jadi, $f + (-f) = O.$

Maka V dengan operasi penjumlahan dan perkalian skalar di atas merupakan suatu ruang vektor atas $\mathbb{R}$. ■

(6) Misalkan V suatu ruang vektor atas $\mathbb{F}$.
Misalkan pula $v_1, v_2, \cdots, v_n$ vektor-vektor di V.
Maka, *span* $\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ akan membentuk subruang dari V.
Pandang $x, y \in span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$, maka

$$\begin{cases} x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \quad \text{dan} \quad y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i v_i \\ x + y = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) v_i \end{cases}$$

demikian sehingga,

$x + y \in span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ .... (1.1)

Kemudian, misalkan $\alpha \in \mathbb{F}$, maka $\alpha x = \sum_{i=1}^{n} \alpha\alpha_i v_i$. Jadi,

$\alpha x \in span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ .... (1.2)

$\therefore$ Dari (1.1) dan ((1.2) maka $span\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ merupakan subruang dari V. ■

Setelah membaca materi subpokok bahasan di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Tentukan subhimpunan dari $\mathbb{R}^n$ yang merupakan subruang
   a) $\{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_1 + 2r_2 + 3r_3 + \cdots + nr_n = 0\}$
   b) $\{(r_1, \cdots, r_n) \mid r_1^2 + r_2^2 + \cdots + r_n^2 = 1\}$

   Jelaskan jawaban Anda.
2) Tentukan subhimpunan dari ruang fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$ yang merupakan subruang
   a) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \; kontinu, \; f(x) = -f(-x), \; \forall x \in \mathbb{R}\}$
   b) $\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \; kontinu, \; f \; solusi \; dari \; PD \; y'' + y' = 2y\}$

3) Misalkan V suatu ruang vektor. Diketahui $w, v_1, \cdots, v_n$ di V dan w merupakan kombinasi linear dari $v_1, \cdots, v_n$. Tunjukkan

$$span\{w, v_1, \cdots, v_n\} = span\{v_1, \cdots, v_n\}$$

4) Misalkan V suatu ruang vektor. Misalkan pula K dan L subruang dari V sehingga dipenuhi $V = K + L$. Tunjukkan $K \cap L = \{0\}$, jika dan hanya jika penulisan setiap vektor di V sebagai hasil tambah dari vektor-vektor di K dan L adalah tunggal.

$$K + L = \{k + l \mid k \in K, l \in L\}$$

Agar latihan Anda terarah dengan baik dan dapat memperkirakan hasil latihan Anda, bacalah rambu-rambu jawaban Latihan.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) a) Tulis $S = \left\{(r_1, \cdots, r_n) \in \mathbb{R}^n \mid r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = 0\right\}$

i) jelas S $\subset \mathbb{R}^n$

ii) $(0, \cdots, 0) \in S$. Jadi $S \neq \varnothing$.

iii) Misalkan $(r_1, \cdots, r_n) \in S$, berarti $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = 0$ dan $(s_1, \cdots, s_n) \in S$

berarti:

$s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n = 0$

$(r_1 + s_1) + 2(r_2 + s_2) + \cdots + n(r_n + s_n) =$

$(r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n) + (s_1 + 2s_2 + \cdots + ns_n) = 0 + 0 = 0$

Jadi, $(r_1, \cdots, r_n) + (s_1, \cdots, s_n) = (r_1 + s_1, \cdots, r_n + s_n) \in S$.

iv) Misalkan $(r_1, \cdots, r_n) \in S$ berarti $r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n = 0$ dan $\alpha \in \mathbb{R}$.

$\alpha r_1 + 2\alpha r_2 + \cdots + n\alpha r_n = \alpha(r_1 + 2r_2 + \cdots + nr_n) = \alpha.0 = 0.$

Jadi $\alpha(r_1, \cdots, r_n) = (\alpha r_1, \cdots, \alpha r_n) \in S$

Dari i sampai dengan iv kita peroleh S subruang dari $\mathbb{R}^n$.

b) Tulis $K = \left\{ (r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{R}^n \,\middle|\, r_1^{\,2} + \ldots + r_n^{\,2} = 1 \right\}$

Pandang $(1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ dan $1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 1$.

Jadi, $(1,0,\ldots,0) \in K$

Pandang pula $(0,1,0,\ldots,0) \in \mathbb{R}^n$ dan $0^2 + 1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 = 1$.

Jadi, $(0,1,0,\ldots,0) \in K$, $(1,0,\ldots,0) + (0,1,0,\ldots,0) = (1,1,0,\ldots,0)$.

Tetapi, $1^2 + 1^2 + 0^2 + \ldots + 0^2 \neq 1$ sehingga

$(1,0,\ldots,0) + (0,1,0,\ldots,0) \notin K$

Jadi, K bukan subruang dari $\mathbb{R}^n$.

2) a) Tulis $K = \left\{ (f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ kontinu, } f(x) = -f(-x)\, \forall x \in \mathbb{R} \right\}$

i) Pandang $f(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Jelas f kontinu di $\mathbb{R}$.

Maka $-f(-x) = -0 = 0$.

Jadi, $f(x) = -f(-x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Berarti $f \in K$.

$\therefore K \neq \varnothing$

ii) Misalkan $f \in K$, berarti f kontinu di $\mathbb{R}$ dan

$f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

$g \in K$, berarti g kontinu di $\mathbb{R}$ dan $g(x) = -g(-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Misalkan pula $\alpha \in \mathbb{R}$.

$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = -f(-x) + \left[-g(-x)\right] = -(f+g)(-x)$,

$\forall x \in \mathbb{R}$ dan $f + g$ kontinu *di* $\mathbb{R}$.

Jadi, $f + g \in K$

$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)) = \alpha(-f(-x)) = -(\alpha f(-x))$ dan

αf kontinu *di R*.

Jadi, $\alpha f \in K$.

$\therefore$ K subruang dari ruang fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

b) Tulis $K = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ kontinu, } f \text{ solusi PD } y'' + y' = 2y \right\}$

i) Pandang

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Jelas f kontinu di $\mathbb{R}$.

$f'' = f' = f = 0$.

$\therefore\ f$ solusi PD $y'' + y' = 2y$.

$\therefore\ f \in L$.

$\therefore L \neq \varnothing$.

ii) Misalkan $f \in L$, berarti f kontinu di $\mathbb{R}$ dan $f'' + f' = 2f$.
Misalkan pula $g \in L$, berarti g kontinu di $\mathbb{R}$ dan
$g'' + g' = 2g$.
Misalkan $\alpha \in \mathbb{R}$.
$(f+g)'' + (f+g)' = f'' + g'' + f' + g' = 2f + 2g = 2(f+g)$.
$f+g$ kontinu di $\mathbb{R}$.
$\therefore\ f+g \in L$.
$(\alpha f)'' + (\alpha f)' = \alpha f'' + \alpha f' = \alpha(f'' + f') = \alpha(2f) = 2\alpha f$.
$\therefore\ \alpha f \in L$. $\therefore L$ subruang dari fungsi kontinu dari $\mathbb{R}$ ke $\mathbb{R}$.

3) Misalkan $x \in span\{w, v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ maka $x = \alpha w + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ untuk suatu $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Tetapi, w kombinasi linear dari $v_1, v_2, \cdots, v_n$.
Berarti $w = \beta v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n$ untuk suatu $\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n \in \mathbb{R}$.
Jadi, $x = \alpha(\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n) + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$
$= (\alpha\beta_1 + \alpha_1)v_1 + \cdots + (\alpha\beta_n + \alpha_n)v_n$.
$\therefore\ x \in span\{v_1, \cdots, v_n\}$
$\therefore\ span\{w, v_1, \cdots, v_n\} \subseteq span\{v_1, \cdots, v_n\}$.

Misalkan $y \in span\{v_1, \cdots, v_n\}$. Berarti $y = \gamma_1 v_1 + \cdots + \gamma_n v_n$ untuk suatu $\gamma_1, \cdots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.
$y = \gamma_1 v_1 + ... + \gamma_n v_n = \gamma_1 v_1 + ... + \gamma_n v_n + 0w$.
$\therefore\ y \in span\{w, v_1, ..., v_n\}$.
$\therefore span\{v_1, ..., v_n\} \subseteq Span\{w, v_1, ..., v_n\}$.
$\therefore\ span\{v_1, ..., v_n\} = span\{w, v_1, ..., v_n\}$.

4) $(\Rightarrow)$ Misalkan $x \in V$ sebarang dengan $x = k_1 + l_1 = k_2 + l_2$ untuk $k_1, k_2 \in K$ dan $l_1, l_2 \in L$. Maka $k_1 - k_2 = l_2 - l_1$.

Tulis $y = k_1 - k_2 = l_2 - l_1$. Karena K dan L subruang,
maka $k_1 - k_2 \in K$ dan $l_2 - l_1 \in L$.
$\therefore\ y \in K \cap L$. Tetapi $K \cap L = \{0\}$.
$\therefore\ y = k_1 - k_2 = l_2 - l_1 = 0$. Jadi, $k_1 = k_2$ dan $l_1 = l_2$.

Jadi, penulisan setiap vektor x di V sebagai hasil tambah dari vektor-vektor di K dan L adalah tunggal.

($\Leftarrow$) Misalkan $x \in K \cap L$ sebarang. Berarti $x \in K$ dan $x \in L$.
$x \in K$, maka $x = x + 0$ dengan $x \in K$ dan $0 \in L$.
$x \in L$, maka $x = 0 + x$ dengan $0 \in K$ dan $x \in L$.
Tetapi penulisan $x \in V$ sebagai hasil tambah dari vektor-vektor di K dan adalah tunggal. Jadi, $x = 0$.
$\therefore\ K \cap L = \{0\}$.

RANGKUMAN

Pada bagian ini Anda telah mempelajari struktur himpunan yang merupakan dasar dari mata kuliah ini. Ruang vektor disebut juga sebagai struktur ruang linear, karena pada ruang tersebut kita mengerjakan operasi tambah.

Objek atau elemen dari ruang vektor tersebut secara umum tidak harus berbentuk vektor, seperti yang kita kenal. Seperti terlihat pada subpokok bahasan ini, elemen dari ruang vektor dapat berupa matriks, fungsi dan lain sebagainya.

TES FORMATIF 1

Jawablah soal-soal berikut!

1) Apakah $H = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \int_0^1 \left(ax^2 + bx + c\right) dx = 0 \right\}$ merupakan ruang vektor?
(*Jelaskan jawaban Anda*)

2) Tentukan subhimpunan dari $\mathbb{F}^n$ di bawah ini yang merupakan subruang dari $\mathbb{F}^n$: (*Jelaskan jawab Anda*!)

a) $\left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^3 \,\middle|\, u + v + w = 0 \right\}$

b) $\left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^3 \,\middle|\, u + v + w = 1 \right\}$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{F}^2 \,\middle|\, uv = 0 \right\}$

d) $\left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, u^2 + v^2 = 0 \right\}$

e) $\left\{ \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \in \pounds^{\,2} \,\middle|\, u^2 + v^2 = 0 \right\}$

3) Mana yang merupakan subruang dari ruang vektor $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ berikut, (*Jelaskan jawab Anda*!).

a) Subhimpunan dari $M_{n\times n}(\mathbb{F})$ yang memiliki rang 1 (*satu*).

b) Subhimpunan yang memiliki rang 0 (*nol*).

c) Matriks-matriks yang merupakan solusi dari persamaan $M^2 + M = I_n$.

d) Matriks-matriks M yang memenuhi $M - M^t = O$.

4) Misalkan V suatu ruang vektor. Misalkan pula $a \in V$ dan $\alpha \in \mathbb{F}$.

Tunjukkan bahwa:

a) $(-\alpha)(a) = -(\alpha a)$

b) $\alpha(-a) = -(\alpha a)$

c) $(-\alpha)(-a) = \alpha a$

Petunjuk: Sebelum Anda mengerjakan soal 4 di atas, terlebih dahulu tunjukkan sifat berikut:

Pada lapangan $\mathbb{F}$ *berlaku*: $(-1)\alpha = -\alpha, \ \forall \alpha \in \mathbb{F}$.

5) Misalkan V suatu ruang vektor. Misalkan pula K dan L masing-masing subruang dari V.
   a) Selidiki apakah $K \cap L$ membentuk subruang dari V.
   b) Selidiki pula apakah $K \cup L$ membentuk subruang dari V.
   c) Jika $K + L = \left\{ k + l \mid k \in K,\ l \in K \right\}$ selidiki apakah $K + L$ merupakan subruang dari V. Jelaskan jawab Anda. (*Jika "ya" tunjukkan dan jika "bukan" berikan contoh*).

6) Misalkan U_1, U_2 dan W masing-masing subruang dari suatu ruang vektor V.
   a) Buktikan $(U_1 \cap W) + (U_2 \cap W) \subseteq (U_1 + U_2) \cap W$.
   b) Buat suatu contoh di $\mathbb{F}^2$ yang menunjukkan bahwa kesamaan pada (a) tidak berlaku.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 1 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 1.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan Kegiatan Belajar 2. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 1, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kegiatan Belajar 2

Bebas Linear

Mari kita pandang subruang-subruang dari $\mathbb{R}^2$ berikut:

$$K = span\left\{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}\right\},$$

$$K' = span\left\{\begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix}\right\} \text{ dan } K'' = span\left\{\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\3\end{bmatrix}\right\}.$$

Maka, dapat ditunjukkan $K = K''$, tetapi $K \neq K'$.

Mengapa terjadi demikian? Mengapa subruang yang *dibangun* oleh 4 (*empat*) vektor, sama dengan subruang yang *dibangun* oleh 2 (*dua*) vektor?
Untuk masalah di atas kita katakan K dibangun oleh

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\-6\end{bmatrix} \text{ dan } \begin{bmatrix}1\\5\end{bmatrix}$$

Pertanyaan-pertanyaan di atas akan dijawab dalam subpokok bahasan ini. Kunci jawaban ada pada konsep *bebas linear*.

Definisi 1.5
Misalkan V suatu *ruang vektor*. Himpunan vektor-vektor $v_1, v_2, \ldots, v_n$ di V dikatakan bebas linear di V, jika kombinasi linear $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n = 0$ hanya dipenuhi oleh $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Jika $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *tidak bebas linear*, kita katakan *bergantung linear*.

Berikut ini mari kita perhatikan suatu sifat yang cukup menarik dari himpunan vektor-vektor bergantung linear dan bebas linear di V yang diberikan oleh Lemma 1.2 dan Lemma 1.3 di bawah ini.

Lemma 1.2.
Misalkan V suatu *ruang vektor*. Misalkan pula $\{v_1, v_2, ..., v_n\}$ *bergantung linear* di V. Maka, terdapat j dengan $1 \le j \le n$ sehingga v_j merupakan *kombinasi linear* dari $v_1, v_2, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n$.

Bukti:
$v_1, v_2, \ldots, v_n$ bergantung linear. Berarti terdapat $\alpha_j \ne 0;\ 1 \le j \le n$ sehingga

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_j v_j + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$
$$\Leftrightarrow \alpha_j v_j = -\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_{j-1} v_{j-1} - \alpha_{j+1} v_{j+1} - \cdots - \alpha_n v_n$$
$$\Leftrightarrow v_j = -{}^{\alpha_1}\!/_{\alpha_j}\, v_1 - \cdots - {}^{\alpha_{j-1}}\!/_{\alpha_j}\, v_{j-1} - {}^{\alpha_{j+1}}\!/_{\alpha_j}\, v_{j+1} - \cdots - {}^{\alpha_n}\!/_{\alpha_j}\, v_n$$
$$\Leftrightarrow v_j = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_{j-1} v_{j-1} + \beta_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \beta_n v_n$$

dengan $\beta_i = -{}^{\alpha_i}\!/_{\alpha_j}$ dan $i \ne j$ atau dengan penulisan lain, yaitu

$$v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne j}}^{n} \beta_i v_i. \qquad \blacksquare$$

Lemma 1.3
Misalkan V = *span* $\{w_1, w_2, \cdots, w_n\}$ suatu *ruang vektor*. Misalkan pula $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ bebas linear di V. Maka $r \le n$.

Bukti:
Akan kita buktikan dengan menggunakan kontradiksi.
Andaikan $r > n$. Misalkan $v_i = \alpha_{i1} w_1 + \alpha_{i2} w_2 + \cdots + \alpha_{in} w_n,\ \forall i = 1, \cdots, r$.
Pandang kombinasi linear $\beta_1 v_1 + \cdots + \beta_r v_r = 0$, maka
$\beta_1 = \cdots = \beta_r = 0$ karena $\{v_1, v_2, \cdots, v_r\}$ bebas linear.

Selanjutnya

$$\beta_1\left(\alpha_{11} w_1 + \alpha_{12} w_2 + \cdots + \alpha_{1n} w_n\right) + \cdots + \beta_r\left(\alpha_{r1} w_1 + \alpha_{r2} w_2 + \cdots + \alpha_{rn} w_n\right) = 0$$

atau

$$\left(\alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{21}\beta_2 + \cdots + \alpha_{r1}\beta_r\right) w_1 + \cdots + \left(\alpha_{1n}\beta_1 + \alpha_{2n}\beta_2 + \cdots + \alpha_{rn}\beta_r\right) w_n = 0$$

atau

$$\begin{cases} \alpha_{11}\beta_1 + \alpha_{21}\beta_2 + \cdots + \alpha_{r1}\beta_r = 0 \\ \alpha_{12}\beta_1 + \alpha_{22}\beta_2 + \cdots + \alpha_{r2}\beta_r = 0 \\ \vdots \\ \alpha_{1n}\beta_1 + \alpha_{2n}\beta_2 + \cdots + \alpha_{rn}\beta_r = 0 \end{cases}$$

Tetapi SPL homogen di atas terdiri dari n persamaan dan r variabel, dengan $r > n$. Maka, SPL di atas memiliki solusi tak hingga banyak (lihat BMP Aljabar Linear Elementer). Hal ini bertentangan karena $\{v_1, \cdots, v_r\}$ bebas linear. Jadi, haruslah $r \le n$. ■

Untuk pemahaman lebih baik tentang konsep bebas dan bergantung linear dari himpunan vektor-vektor di suatu ruang vektor, perhatikan contoh-contoh berikut ini.

Contoh 1.4

(1) Pandang ruang fungsi $V = \left\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,\middle|\, f \text{ } \textit{pemetaan} \right\}$.

Misalkan $f(x) = 1$, $g(x) = e^x$ dan $h(x) = e^{2x}$ adalah fungsi-fungsi di *V*.

Akan ditunjukkan bahwa $\{f, g, h\}$ *bebas linear* di *V*.

Untuk menunjukkan kebebaslinearan $\{f, g, h\}$, pandang kombinasi linear:

$$\alpha f + \beta g + \gamma h = O$$

Jadi,

$$\begin{aligned}(\alpha f + \beta g + \gamma h)(x) &= \alpha f(x) + \beta g(x) + \gamma h(x) \\ &= O(x) = O, \quad \forall x \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Selanjutnya, untuk $x = 0$, $x = 1$ dan $x = 2$, kita peroleh SPL berikut:

$$\begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=0 \\ \alpha+\beta e+\gamma e^2=0 \\ \alpha+\beta e^2+\gamma e^4=0 \end{cases}$$

Dapat ditunjukkan bahwa solusi SPL di atas adalah $\alpha=\beta=\gamma=0$.
Jadi $\{f, g, h\}$ *bebas linear*. ■

(2) Pandang ruang fungsi seperti pada Contoh 1.4 nomor (1) di atas. Misalkan

$$f_1(x)=\cos^2 x,\ f_2(x)=\sin^2 x \text{ dan } f_3(x)=\cos 2x.$$

Kita ketahui bahwa: $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$ (ini berarti $\cos 2x$ merupakan kombinasi linear dari $\cos^2 x$ dan $\sin^2 x$), maka berdasarkan Tes Formatif 2 nomor 2 (*kebalikan Lemma* 1.2) kita peroleh $\{f_1, f_2, f_3\}$ *bergantung linear*. ■

Setelah membaca materi subpokok bahasan di atas, cobalah kerjakan latihan berikut agar pemahaman Anda lebih mantap.

LATIHAN

Untuk memperdalam pemahaman Anda mengenai materi di atas, kerjakanlah latihan berikut!

1) Diketahui V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Tunjukkan kebalikan Lemma 1.2 senantiasa berlaku.
2) Diketahui V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Diketahui pula $X=\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bebas linear di V. Selidiki apakah $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bebas linear di V. Jelaskan jawaban Anda!

3) Diketahui seperti soal nomor 2. Misalkan pula $y \in V$. Selidiki apakah $\{x_1, x_2, \cdots, x_n, y\}$ bebas linear di *V*. Jelaskan jawaban Anda.
4) Diketahui *V* suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Diketahui pula $Y = \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$ membangun *V*. Selidiki apakah $\{y_2, y_3, \cdots, y_m\}$ membangun *V*. Jelaskan jawaban Anda.
5) Diketahui seperti soal nomor 4. Misalkan pula $z \in V$. Selidiki apakah $\{y_1, y_2, \cdots, y_m, z\}$ membangun *V*. Jelaskan jawaban Anda.

Petunjuk Jawaban Latihan

1) $$v_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \alpha_i v_i \Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} - v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + (-1) v_j + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

Jadi terdapat $\alpha_j = -1 \neq 0$ di $\mathbb{F}$ sehingga $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$.

Jadi, $\{v_1, \cdots, v_{j-1}, v_j, v_{j+1}, \cdots, v_n\}$ bergantung linear.

2) Pandang kombinasi linear
$\alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0$ ………………………………… (1.3)
Maka,
$0 = \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = 0 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$. ………… (1.4)
Tetapi, $\{x_1, \cdots, x_n\}$ bebas linear di *V*. Maka kombinasi linear (1.4) hanya dapat dipenuhi oleh $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Jadi kombinasi linear (1.3) hanya dipenuhi oleh $\alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$. Jadi, $\{x_2, \cdots, x_n\}$ bebas linear di *V*.
3) *Kasus 1.*
Jika $y \in span\{x_1, \cdots, x_n\}$, maka $y = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$ untuk $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ di $\mathbb{F}$. Menurut soal nomor 1 di atas, maka $\{x_1, \cdots, x_n, y\}$ bergantung linear.

Kasus 2.

Jika $y \notin span\,\{x_1, \cdots, x_n\}$, andaikan $\{x_1, \cdots, x_n, y\}$ bergantung linear. Maka terdapat $\beta_1, \cdots, \beta_{i-1}, \beta_{i+1}, \cdots, \beta_n, \gamma$ di $\mathbb{R}$, sehingga

$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \beta_j x_j + \gamma y$. Jelas $\gamma \neq 0$, karena jika $\gamma = 0$, maka

$x_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \beta_j x_j$ dan ini berarti $\{x_1, \cdots, x_n\}$ bergantung linear.

Hal ini bertentangan dengan $\{x_1, \cdots, x_n\}$ bebas linear.

$\therefore\ \gamma \neq 0$. Jadi, $y = \gamma^{-1} x_i - \gamma^{-1} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \beta_j x_j$.

Ini berarti, $y \in span\,\{x_1, \cdots, x_n\}$. Hal ini bertentangan dengan $y \notin span\,\{x_1, \cdots, x_n\}$. Jadi haruslah $\{x_1, \cdots, x_n, y\}$ bebas linear.

4) *Kasus 1.*

$y_1 \notin span\,\{y_2, \cdots, y_n\}$. Maka $y_1 \in V$ tidak dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\{y_2, \cdots, y_n\}$. Jadi $\{y_2, \cdots, y_n\}$ tidak membangun *V*.

Kasus 2.

$y_1 \in span\,\{y_2, \cdots, y_n\}$, maka terdapat $\beta_2, \cdots, \beta_n$ di $\mathbb{F}$ sehingga $y_1 = \beta_2 y_2 + \cdots + \beta_n y_n$. Sekarang misalkan $x \in V$ sebarang, $\{y_1, \cdots, y_n\}$ membangun *V* berarti terdapat $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ di $\mathbb{F}$ sehingga

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_n y_n \\ &= \alpha_1(\beta_2 y_2 + \cdots + \beta_n y_n) + \alpha_2 y_2 + \cdots + \alpha_n y_n \\ &= (\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2) y_2 + \cdots + (\alpha_1 \beta_n + \alpha_n) y_n. \end{aligned}$$

Jadi setiap vektor di *V* dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $\{y_2, \cdots, y_n\}$. Jadi $\{y_2, \cdots, y_n\}$ membangun *V*.

5) Misalkan $x \in V$ sebarang dan $\{y_1, \cdots, y_m\}$ membangun *V*. Berarti terdapat $\alpha_1, \cdots, \alpha_m$ di $\mathbb{F}$ sehingga

$x = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m = \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_m y_m + 0z;\ z \in V$.

Jadi setiap vektor di V dapat ditulis sebagai kombinasi linear dari $y_1, \cdots, y_m, z$. Jadi $\{y_1, \cdots, y_m, z\}$ membangun V.

RANGKUMAN

Pada bagian ini Anda telah mempelajari sifat bebas linear dan bergantung linear dari kumpulan vektor. Pada kumpulan vektor yang bebas linear, tidak akan berubah sifatnya walaupun anggota dari vektor tersebut dikalikan dengan skalar tidak nol.

TES FORMATIF 2

Jawablah soal-soal berikut!

1) Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan pula $\{u, v, w\}$ bebas linier di V. Tunjukkan $\{u+v, v+w, u+w\}$ bebas linier di V dan
$$span\ \{u, v, w\} = span\ \{u+v, v+w, u+w\}.$$
2) Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan pula $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ vektor-vektor di V. Jika $v_1 = \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq 1}} \alpha_j v_j$

   Tunjukkan bahwa $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bergantung linear.
3) Misalkan V suatu ruang vektor atas lapangan $\mathbb{F}$. Misalkan pula $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bebas linier di V dan $v \notin span\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$.

   Tunjukkan bahwa $\{v_1 + v, v_2 + v, \ldots, v_n + v\}$ bebas linier.
4) Misalkan $V = span\ \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ dan $w_1, w_2, \ldots, w_n \in V$ dengan $m > n$.

   Tunjukkan $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ bergantung linier.
5) Misalkan $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ bebas linier di $\mathbb{R}^n$. Misalkan pula A suatu matriks berukuran $n \times n$ dan A memiliki invers.

   Tunjukkan $\{Av_1, Av_2, \ldots, Av_n\}$ bebas linear.

Cocokkanlah jawaban Anda dengan Kunci Jawaban Tes Formatif 2 yang terdapat di bagian akhir modul ini. Hitunglah jawaban yang benar. Kemudian, gunakan rumus berikut untuk mengetahui tingkat penguasaan Anda terhadap materi Kegiatan Belajar 2.

$$\text{Tingkat penguasaan} = \frac{\text{Jumlah Jawaban yang Benar}}{\text{Jumlah Soal}} \times 100\%$$

Arti tingkat penguasaan: 90 - 100% = baik sekali
80 - 89% = baik
70 - 79% = cukup
< 70% = kurang

Apabila mencapai tingkat penguasaan 80% atau lebih, Anda dapat meneruskan dengan modul selanjutnya. **Bagus!** Jika masih di bawah 80%, Anda harus mengulangi materi Kegiatan Belajar 2, terutama bagian yang belum dikuasai.

Kunci Jawaban Tes Formatif

Tes Formatif 1

1) Karena H subhimpunan tak hampa dari $\mathbb{R}^3$, maka untuk menyelidiki apakah H ruang vektor, cukup diselidiki apakah H Subruang dari $\mathbb{R}^3$ dengan menggunakan Lemma 1.1.
2) a) subruang.
   b) bukan subruang.
   c) bukan subruang.
   d) bukan subruang.
   e) bukan subruang.
3) a) bukan subruang.
   b) subruang.
   c) bukan subruang.
   d) bukan subruang.
4) Pertama-tama akan ditunjukkan bahwa pada lapangan $\mathbb{F}$ berlaku
   $0.\alpha = 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

   $0.\alpha = (0+0)\alpha = 0\alpha + 0.\alpha$

   $-(0.\alpha) + 0.\alpha = -(0.\alpha) + 0.\alpha + 0.\alpha$

   $0 = 0 + 0.\alpha$

   $0 = 0.\alpha$

   Berikutnya akan ditunjukkan bahwa pada lapangan $\mathbb{F}$ berlaku
   $(-1)\,\alpha = -\alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

   $(-1)\,\alpha + \alpha = (-1)\,\alpha + 1.\alpha$

   $= (-1+1)\alpha$

   $= 0\ \alpha$

   $= 0$

   $\therefore (-1)\,\alpha = -\,\alpha$

   a) $(-\alpha) + \alpha.a = (-\alpha + \alpha)a$

   $= 0.a$

   $= 0$

   $\therefore\ (-1)a = -(\alpha a)$

b) $\alpha(-a)+\alpha\ a = \alpha(-a+a)$

$= \ \alpha . 0$

$= \ 0$

$\therefore \ \alpha(-a) = -(\alpha - a)$

c)

$(-\alpha)(-a)+(-\alpha) = (-\alpha)(-a+a)$

$= (-\alpha)\ 0$

$= \ 0$

$\therefore \ (-\alpha)(-a) = \alpha - a$

5) a) ya.
   b) tidak selalu.
   c) ya.

6) a) Ambil $x \in (U_1 \cap W)+(U_2 \cap W)$.

Misalkan $x = y+z$ dengan $y \in U_1 \cap W$ dan $z \in U_2 \cap W$.

Karena $y \in U_1$ dan $z \in U_2$, maka $x = y+z \in U_1 + U_2$.

Karena $y \in W$ dan $z \in W$, maka $x = y+z \in W$.

Jadi $x = y+z \in (U_1 + U_2) \cap W$.

b) Silakan dicoba sebagai latihan.

Tes Formatif 2

1) a) Pandang kombinasi linear

$\alpha(u+v)+\beta(v+w)+\gamma(u+w)=0$

$\therefore \ (\alpha+\gamma)u+(\alpha+\beta)v+(\beta+\gamma)w=0$

Karena $\{u,v,w\}$ bebas linear, maka

$\alpha+\gamma=\alpha+\beta=\beta+\gamma=0$

$\therefore \ \alpha=\beta=\gamma=0..$

b) Misalkan $x \in span\,\{u,v,w\}$.

Jadi $x = \alpha u+\beta v+\gamma w$

$= \alpha'(u+v)+\beta'(v+w)+\gamma'(u+w)$

$= (\alpha'+\gamma')u+(\alpha'+\beta')v+(\beta'+\gamma')w$

Karena $\{u,v,w\}$ bebas linear, maka

$\alpha'+\gamma'=\alpha \ ; \quad \alpha'+\beta'=\beta \ ; \quad \beta'+\gamma'=\gamma$

2) $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$.

$$v_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j v_j$$

$$\therefore \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j v_j - v_i = 0$$

$\therefore \ \exists -1 \neq 0$ sedemikian hingga kombinasi linear di atas sama dengan nol.

$\therefore \ \{v_1, \ldots, v_n\}$ bergantung linear.

3) Pandang kombinasi linear

$\alpha_1(v_1 + v) + \alpha_2(v_2 + v) + \cdots + \alpha_n(v_n + v) = 0.$

$\therefore \ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n + (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)v = 0.$

Jika $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n \neq 0$, maka

$(\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n)^{-1}(-\alpha_1 v_1 - \cdots - \alpha_n v_n) = v$

$\therefore \ v \in span\{v_1, \ldots, v_n\}$..

Hal ini bertentangan dengan $v \notin span\{v_1, \ldots, v_n\}$.

$\therefore \ \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 0$

$\therefore \ \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

Karena $\{v_1, \ldots, v_n\}$ bebas linear, maka

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$\therefore \ \{v_1 + v, \ldots, v_n + v\}$ bebas linear.

4) Misalkan $w_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} v_j \quad , \quad i = 1, \ldots, m$

Pandang kombinasi linear

$$\sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i = 0$$

$\beta_1(\alpha_{11} v_1 + \cdots + \alpha_{1n} v_n) + \cdots + \beta_m(\alpha_{m1} v_1 + \cdots + \alpha_{mn} v_n) = 0$

$(\beta_1 \alpha_{11} + \beta_2 \alpha_{21} + \cdots + \beta_m \alpha_{m1})v_1 + \cdots + (\beta_1 \alpha_{1n} + \cdots + \beta_m \alpha_{mn})v_n = 0$

Jika $\{v_1, \cdots, v_n\}$ bebas linear, maka

$\beta_1\alpha_{11} + \cdots + \beta_m\alpha_{m1} = 0$

$\vdots$

$\beta_1\alpha_{1n} + \cdots + \beta_m\alpha_{mn} = 0$.

m anu dan *n* persamaan, dengan $m > n$.

SPL homogen memiliki tak hingga banyak jawab.

$\therefore \quad \{w_1, \cdots, w_m\}$ bergantung linear.

Jika $\{v_1, \cdots, v_n\}$ bergantung linear maka dapat direduksi menjadi subhimpunan yang bebas linear. Proses selanjutnya sama dengan di atas.

5) Pandang kombinasi linear

$\alpha_1 Av_1 + \cdots + \alpha_n Av_n = 0$

$A(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$

Karena A^{-1} ada, maka

$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$

Karena $\{v_1, \cdots, v_n\}$ bebas linear, maka

$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$

$\therefore \quad \{Av_1, \cdots, Av_n\}$ bebas linear.

Daftar Pustaka

Bill Jacob. (1990). *Linear Algebra*. W.H. Freeman and Company.

Leon, SJ, (1990). *Linear Algebra with Application.* MacMilan Publishing Company.

Strang, G. (1988). *Linear Algebra and Its Application.* 3rd edition Academic Press.

Curtin, CW. (1984). *Linear Algebra An Introduction Approach.* Undergraduate Text in Mathematics Springer verlag.